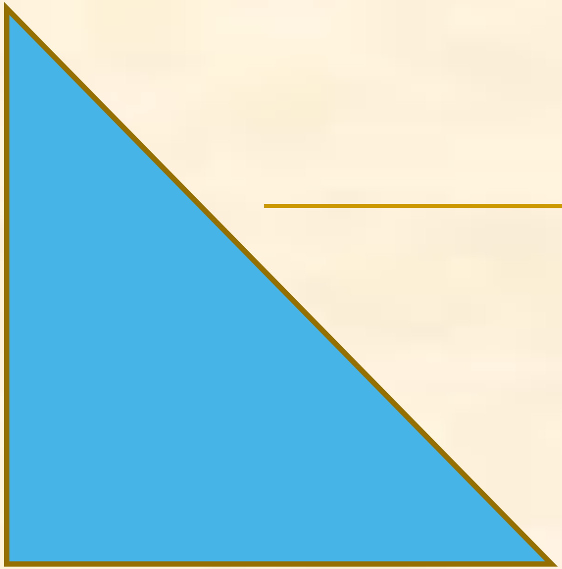
Расстояние между скрещивающимися прямыми

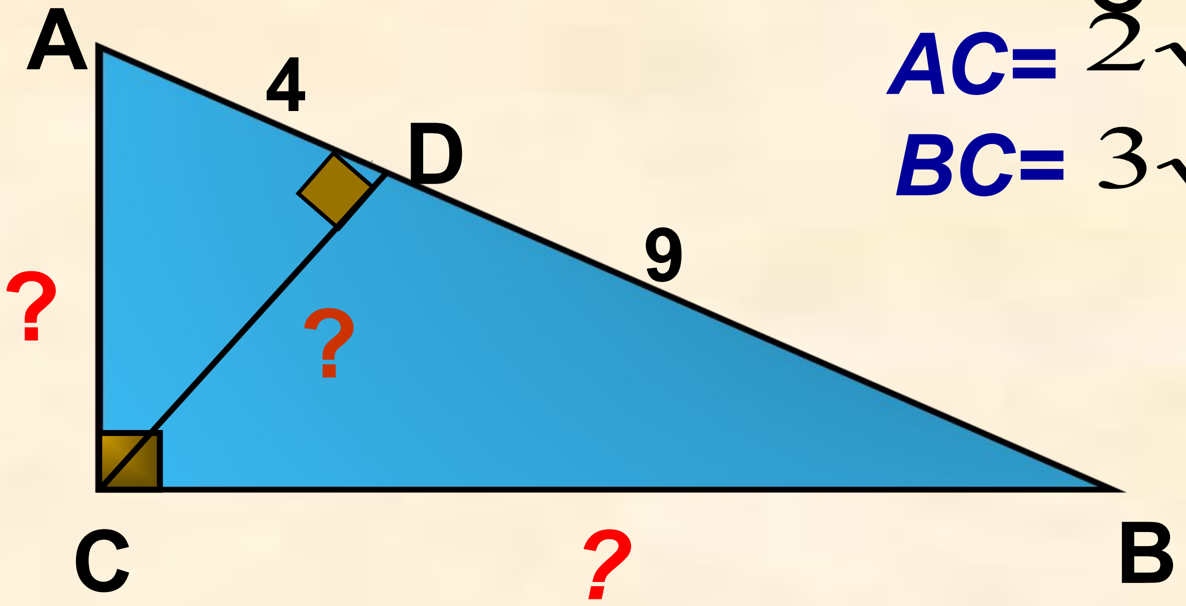
на примере одной задачи

Сергеева О.В.,

преподаватель математики НВМУ

Вся теория по прямоугольному треугольнику

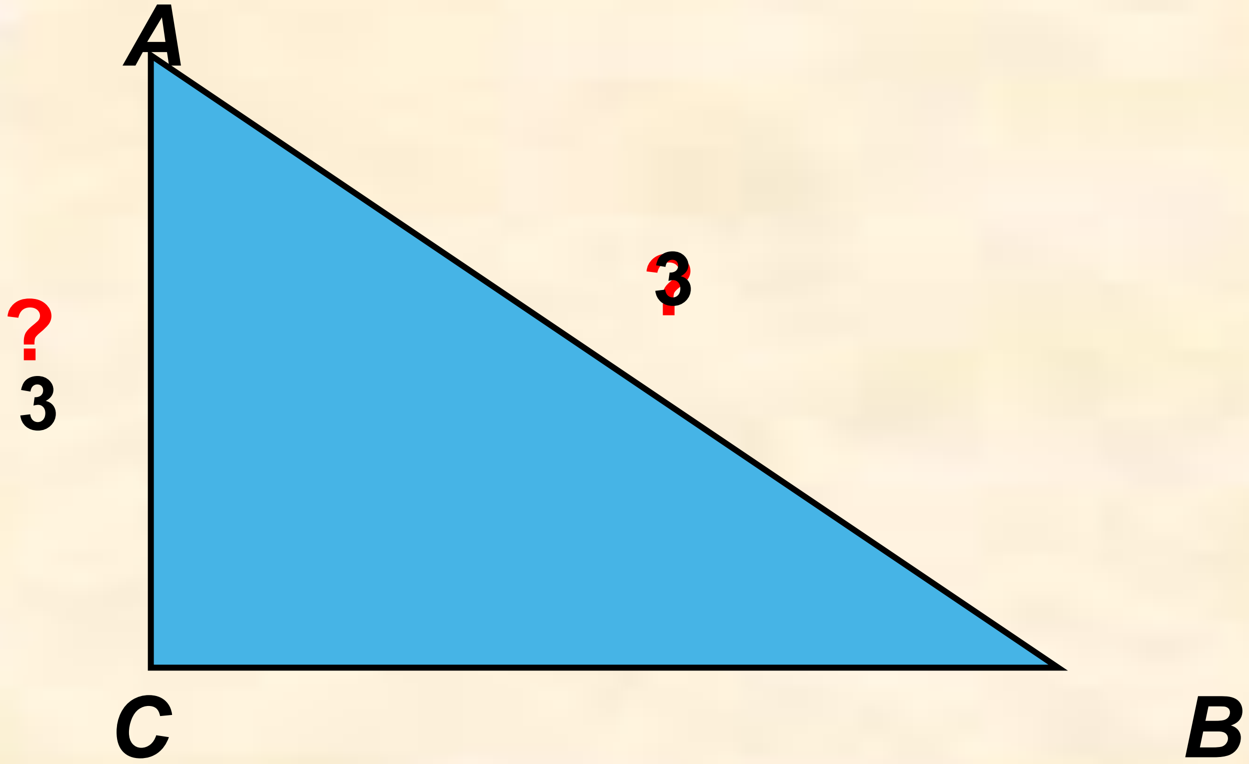




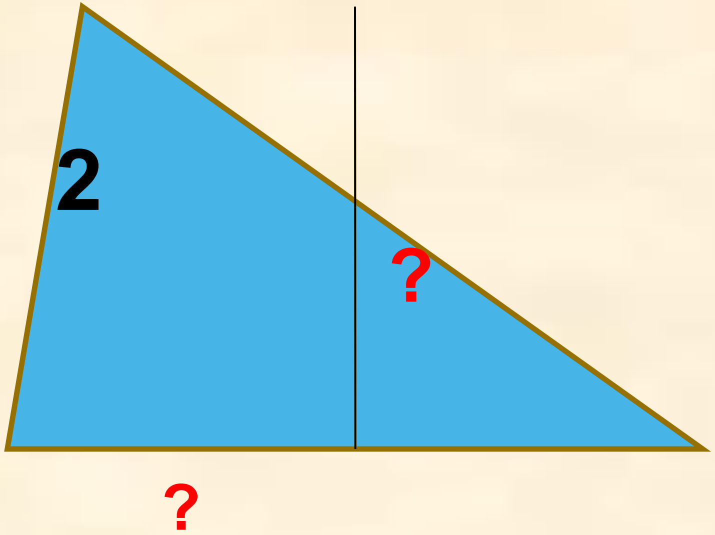
$CD = 6$

$AC = 2\sqrt{13}$

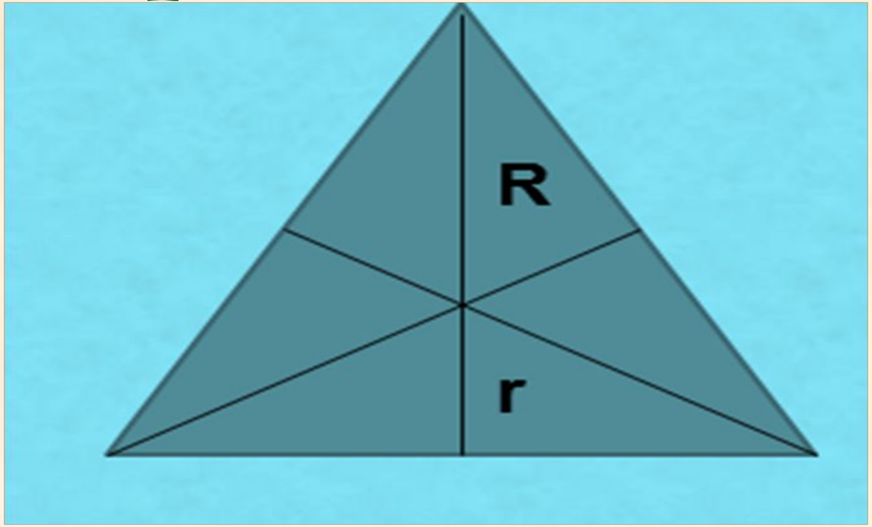
$BC = 3\sqrt{13}$


A
?
3
?
3
C
B

Вся теория по равностороннему треугольнику

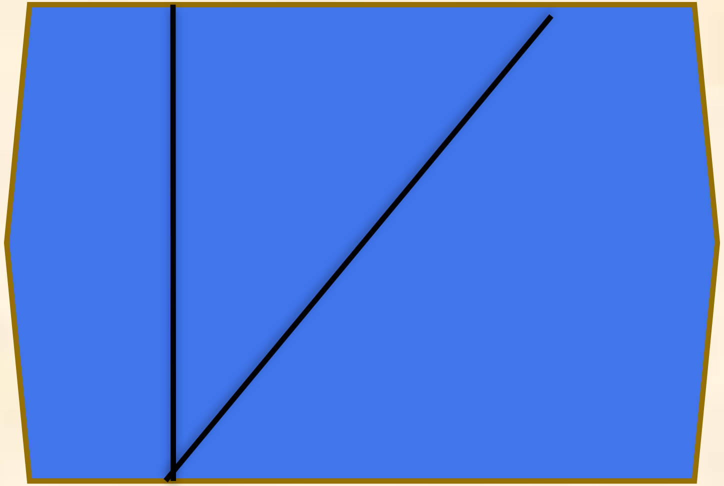


R
r
S



Вся теория по правильному шестиугольнику

2



R

r

S

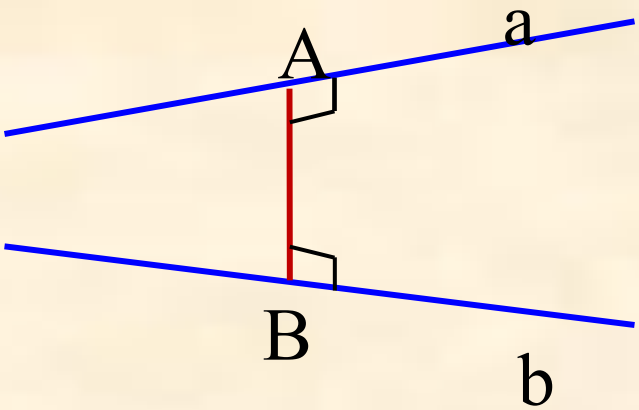
Основные способы решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, т.е. отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного каждой из этих прямых.

Нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую.

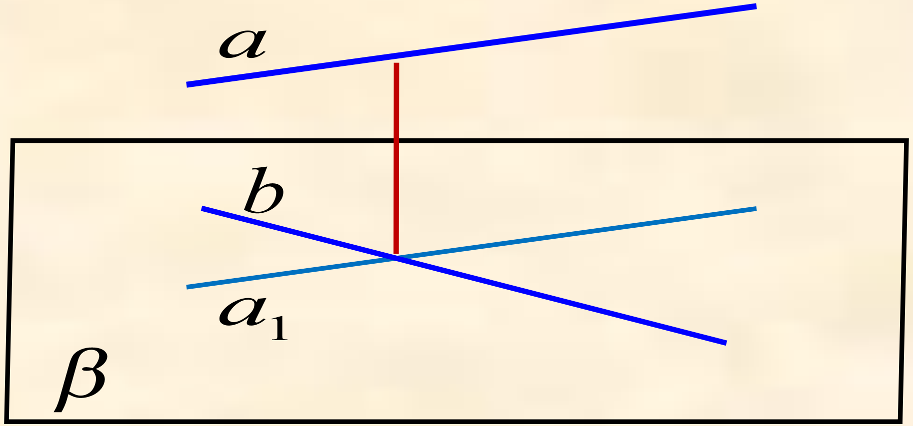
Нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.



$$\rho(a;b) = AB$$

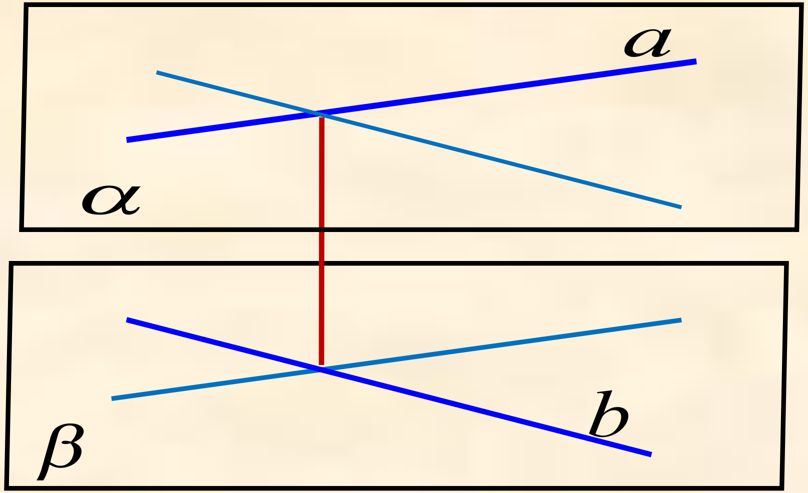
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



$$\beta \parallel a$$

$$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$$

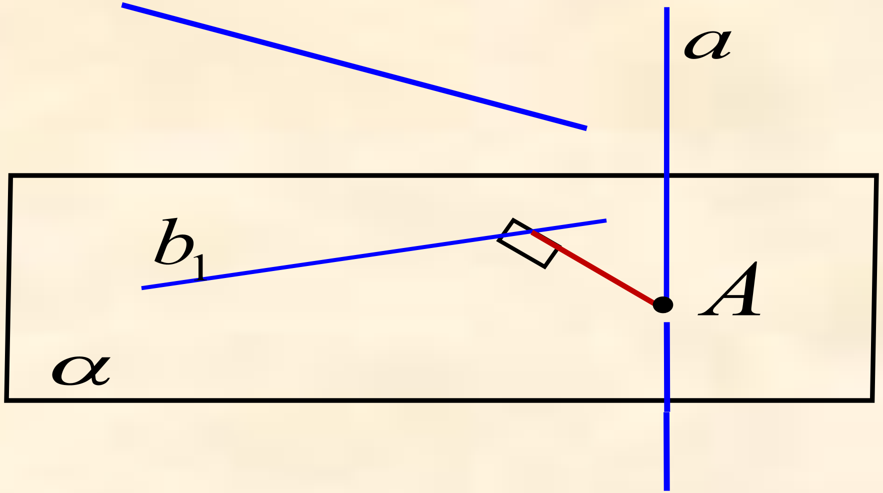
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.



$$\alpha \parallel \beta$$

$$\rho(a;b) = \rho(\alpha;\beta)$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них.

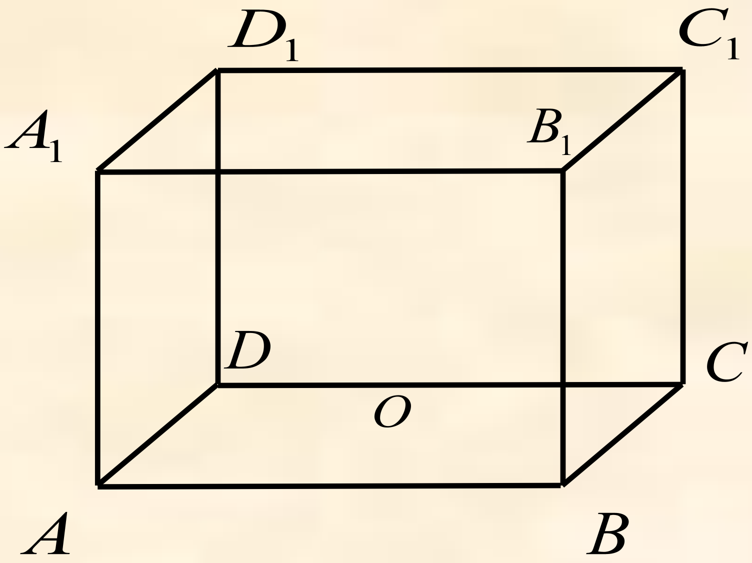


$$\alpha \perp a$$

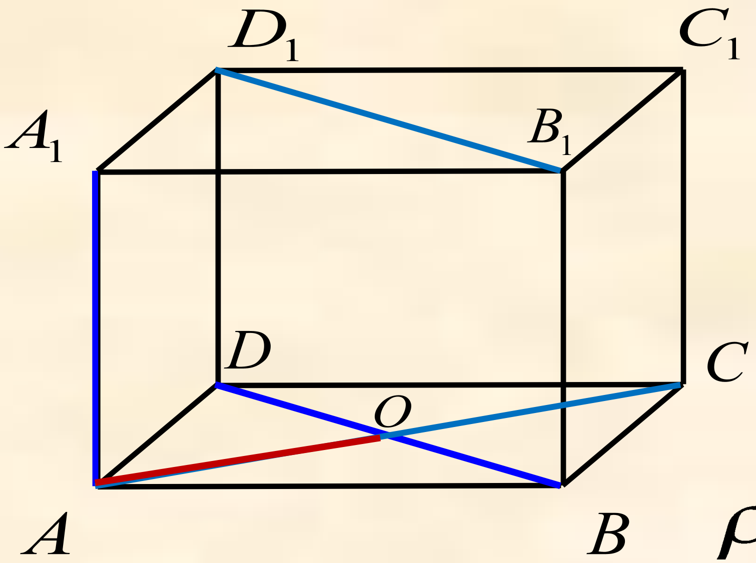
$$a \to A \qquad b \to b_1$$

$$\rho(a;b) = \rho(A;b_1)$$

В единичном кубе найдите

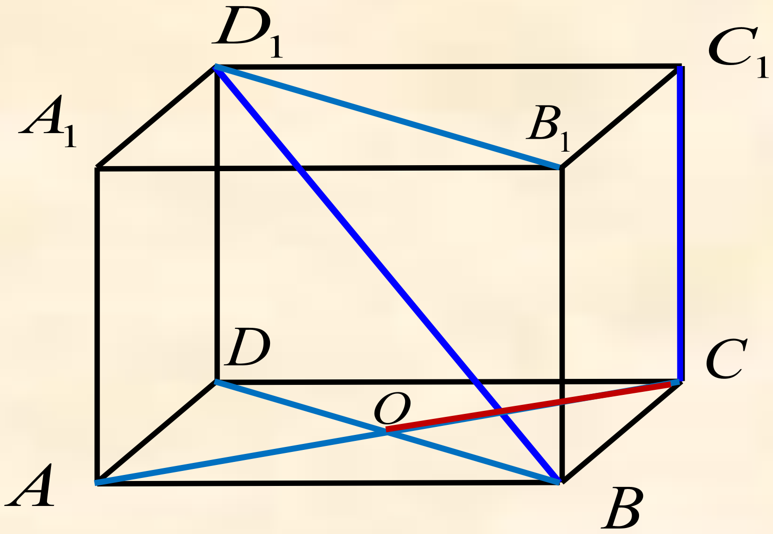


В единичном кубе найдите $\rho\left(AA_1; BD\right)$



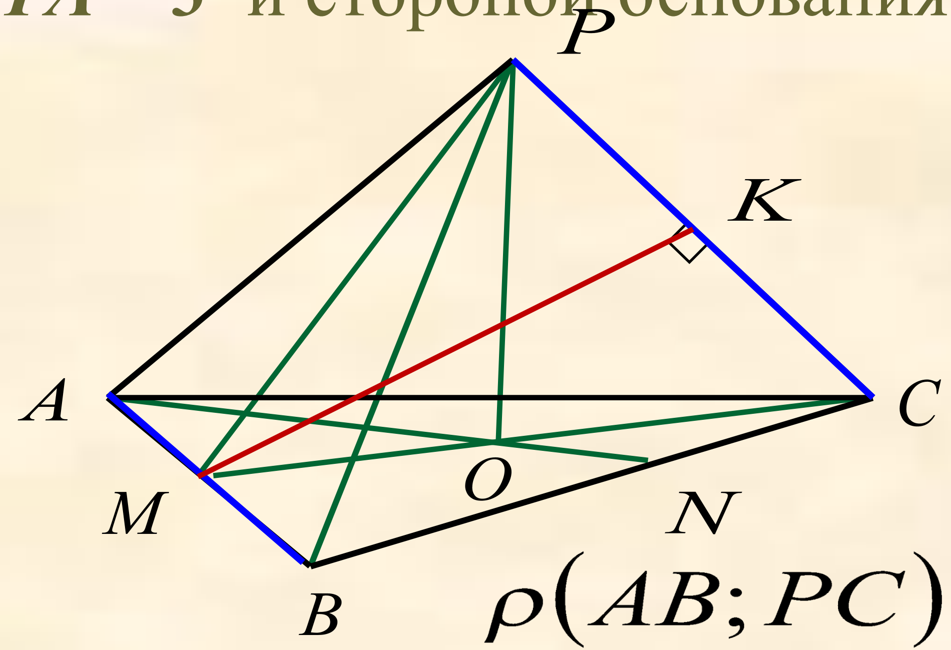
$$\rho\left(AA_1; BD\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

В единичном кубе найдите $\rho(CC_1; BD_1)$



$$\rho(CC_1; BD_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Дана правильная пирамида ***PABC*** с боковым ребром ***PA = 3*** и стороной основания ***2***. Найдите $\rho(AB; PC)$



$$PO \perp (ABC)$$

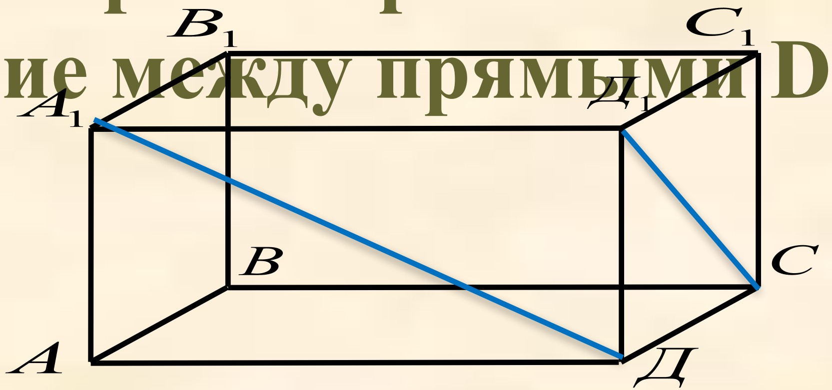
$$AB \perp CM \qquad AB \perp PM$$

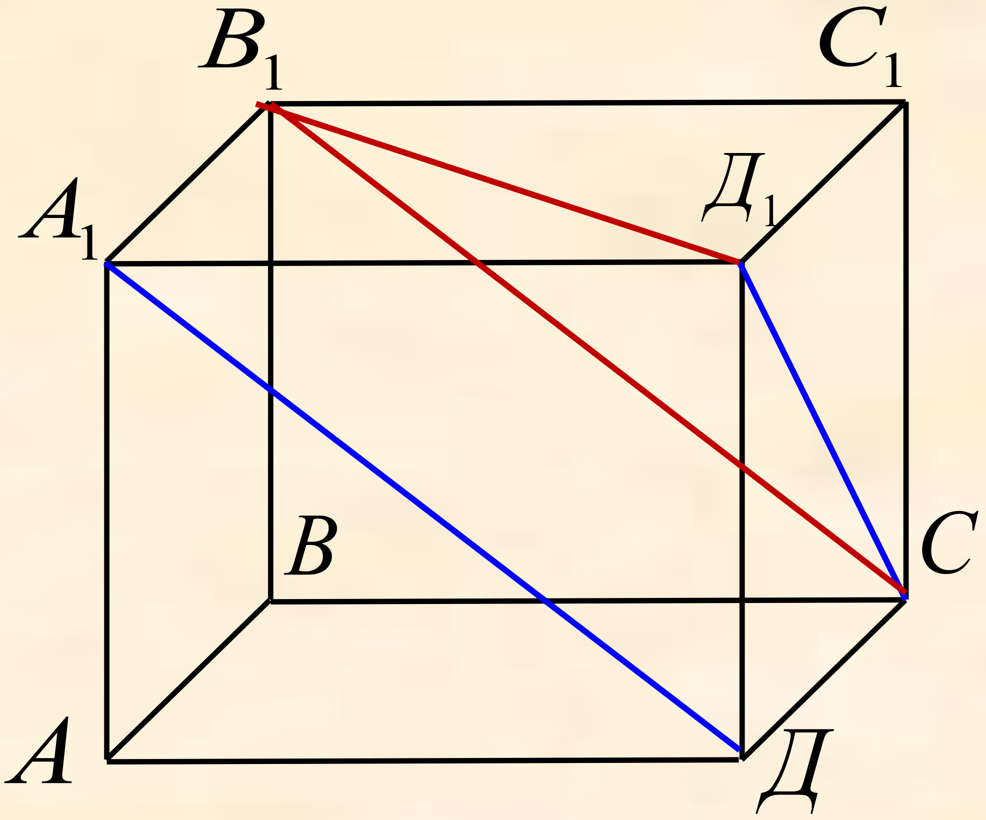
$$AB \perp (PMC)$$

$$\rho(AB; PC) = \rho(M; PC) = MK$$

$$\rho(AB; PC) = \frac{\sqrt{23}}{3}$$

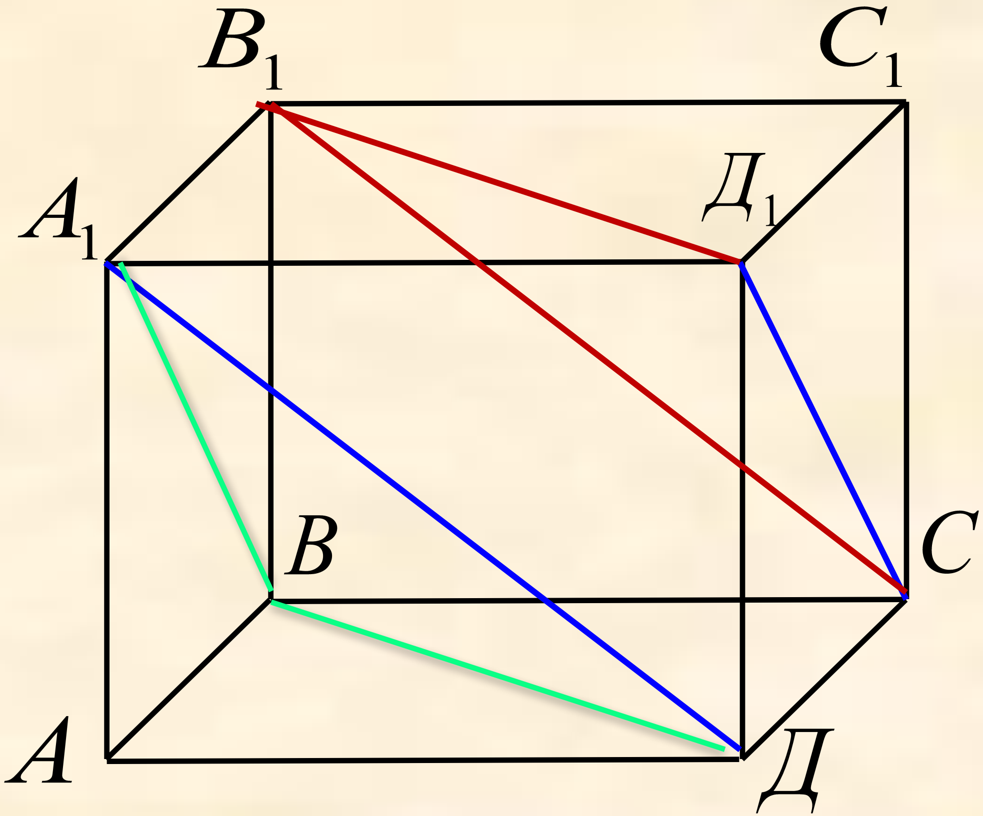
Задача.
Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат ABCD со стороной равной 4. Высота призмы равна $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми DA_1 и CD_1.





$$\rho\left(ДA_1; CД_1\right)$$

$$\rho\left(A_1; B_1CД_1\right)$$



$$\rho\left(ДA_1;\, CД_1\right)$$

$$\rho\left(A_1BД;\, B_1CД_1\right)$$

Метод объемов

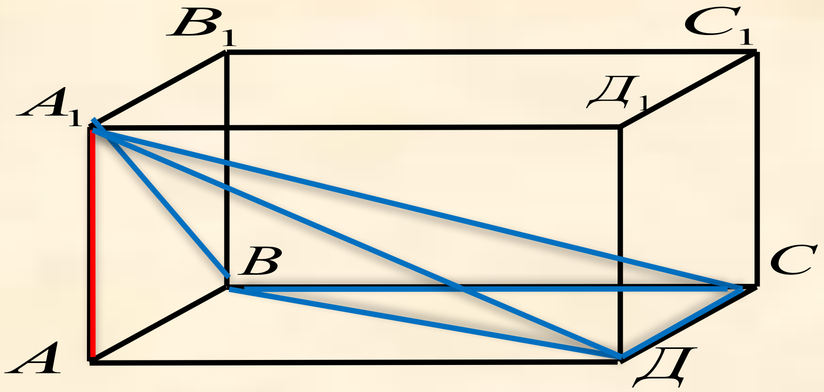
(использование вспомогательной пирамиды).

Рассматривается пирамида, высота которой является искомым расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми.

Для нахождения же высоты следует найти объём этой пирамиды двумя способами, и затем найти эту высоту.

Рассмотрим пирамиду $BCDA_1$. Пусть в ней h – это высота, проведенная из вершины

Длина $V_{CA_1BD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AA_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{2} 16 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ и DA_1 и CD_1.



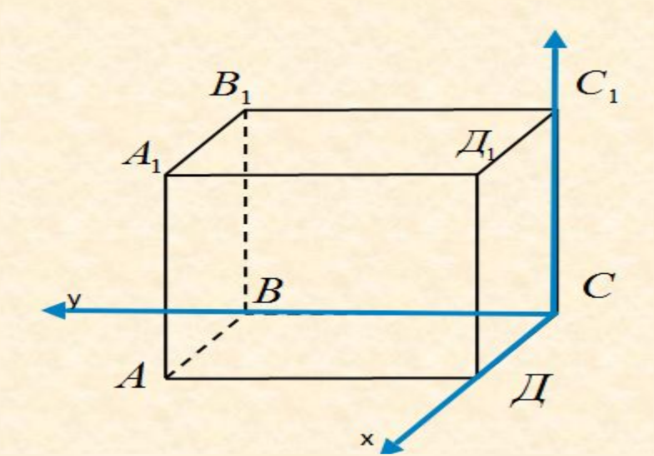
$$V_{CA_1BD} = \frac{1}{3} S_{A_1BD} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1O \cdot BD \cdot h = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} h = \frac{8\sqrt{2}}{3} h$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} h = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\rho(ДA_1; CД_1) = 2$$

$$h = 2$$



$$C(0;0;0) \quad B(0;4;0)$$

$$Д(4;0;0)\,A_1\left(4;4;2\sqrt{2}\right)$$

$$\left(A_1BД\right): x+y-\sqrt{2}z-4=0$$

$$\rho\left(\left(A_1BД\right);C\right)=\frac{\left|1*0+1*0+9-\sqrt{2}*0-4\right|}{\sqrt{1+1+2}}=2$$