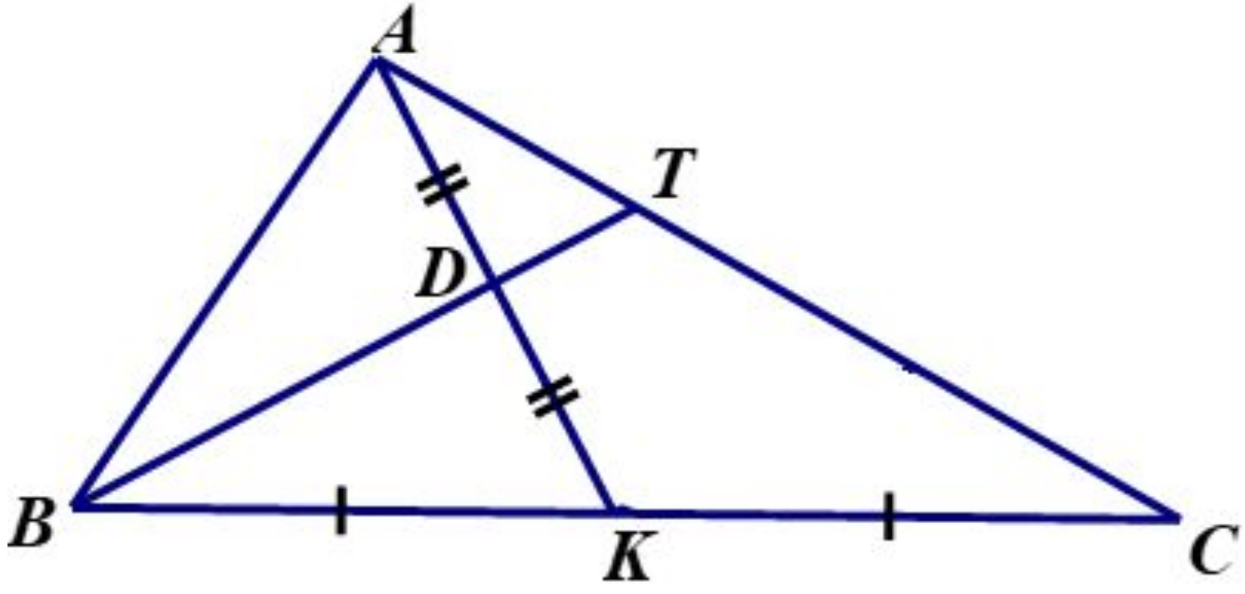
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Задачи по планиметрии на ЕГЭ(профиль) и ОГЭ по математике

Фридман Елена Михайловна

Задача 1 (ЕГЭ основная волна 2022 г.).

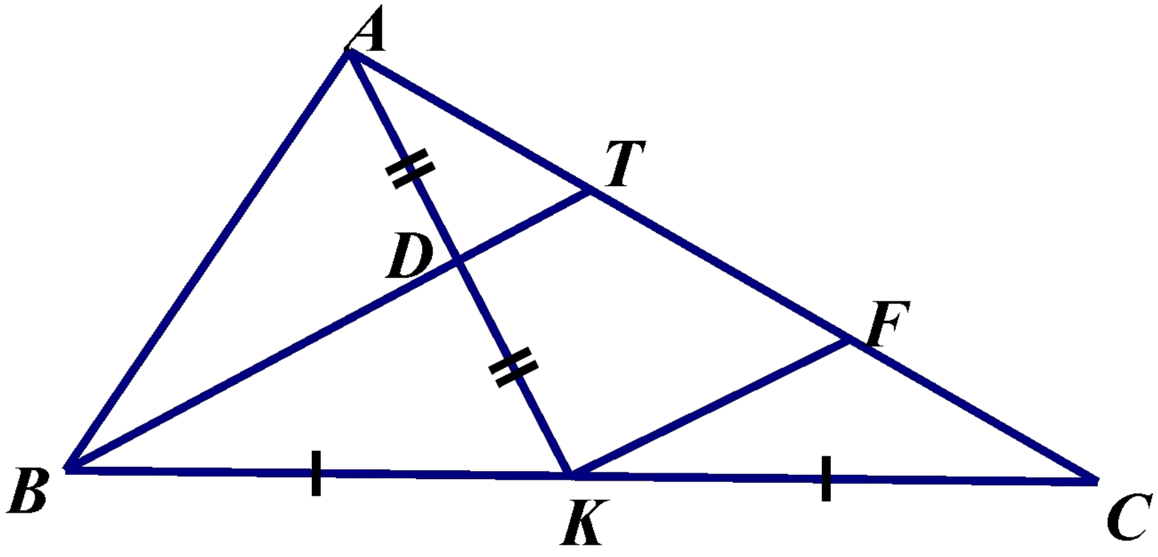
Через середину D медианы AK треугольника ABC и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке T. Найдите отношение площади треугольника ABD к площади четырёхугольника $CKDT$.



Решение.

Пусть $S_{ABC} = \text{S}$, тогда

$S_{AKC} = S_{ABK} = \frac{S}{2}$, $S_{ABD} = S_{BKD} = \frac{S}{4}$.



KF||BT⇒TF=FC, AT=TF, откуда

TF=FC=AT.

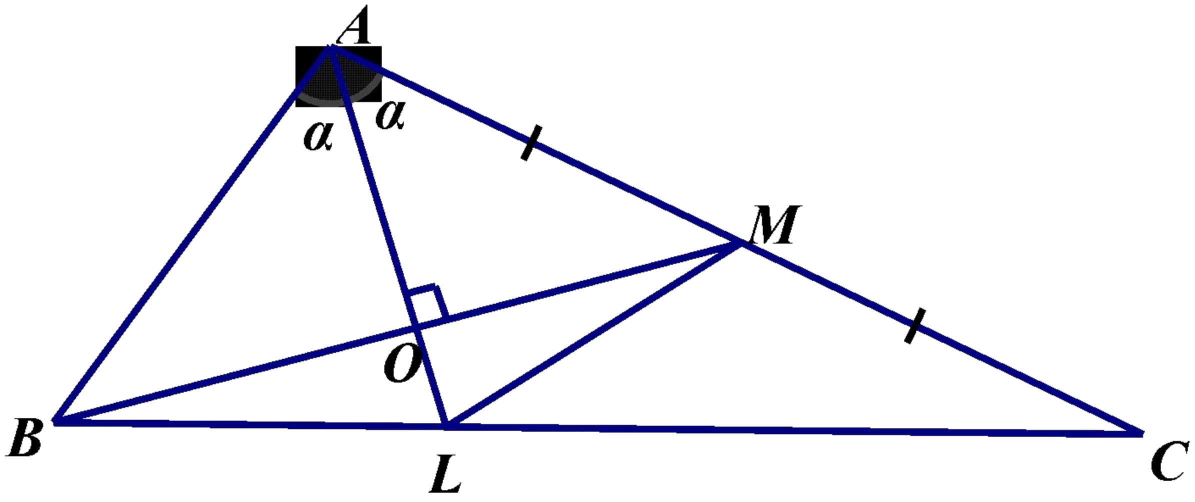
$\frac{S_{ABT}}{S_{BCT}} = \frac{AT}{TC} = \frac{1}{2}$ (треугольники ABT и BTC имеют общую высоту, проведённую из вершины B).

$S_{BCT} = \frac{2S}{3}$. $S_{CKDT} = S_{BCT} - S_{BDK} = \frac{2S}{3} - \frac{S}{4} = \frac{5S}{12}$.

$S_{ABD}\colon S_{CKDT} = S_{BDK}\colon S_{CKDT} = \frac{S}{4}\colon \frac{5S}{12} = 3\colon 5$.

Задача 2 (вариант резерва ДВИ МГУ 2022).

Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна его медиане BM. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что $AB=\sqrt{3}$, $ML=1$.



Решение.

$$S_{ABC} = 2S_{ABM},\ S_{ABM} = 2S_{ABO},$$

$$S_{ABC} = 4\ S_{ABO}.$$

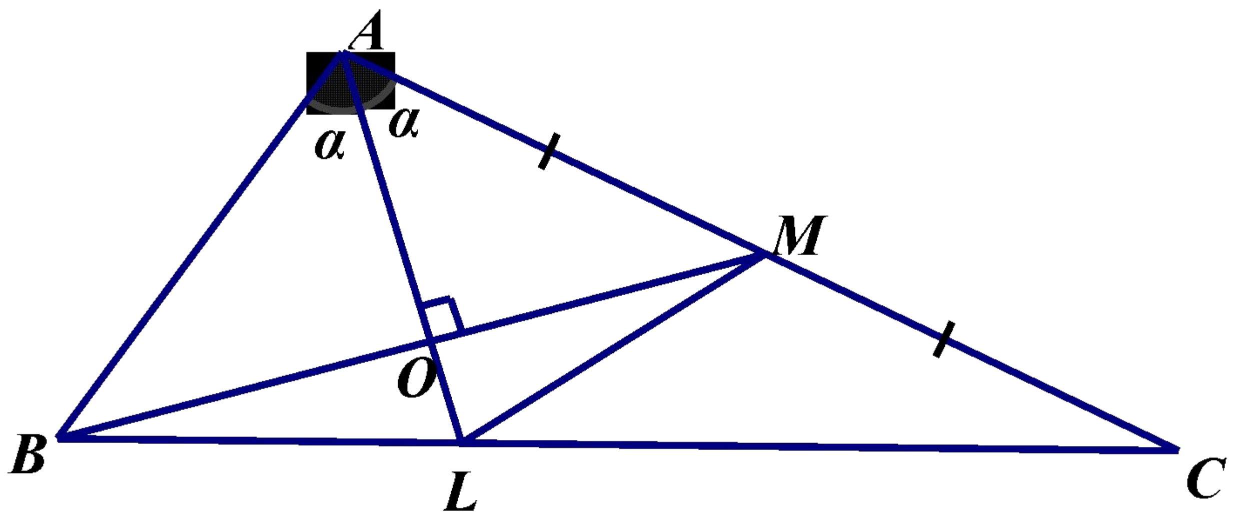
$AC=2AM=2AB=2\sqrt{3}$.

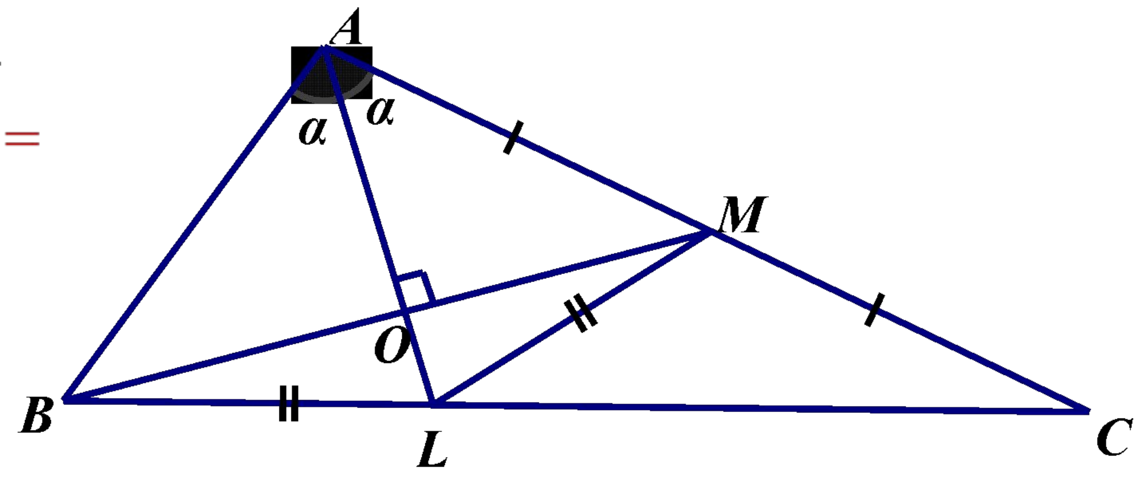
$BL{:}LC=AB{:}AC=1{:}2$

$BL=LM=1$, $BC=3$.

$$S_{ABC} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{27}{4}-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



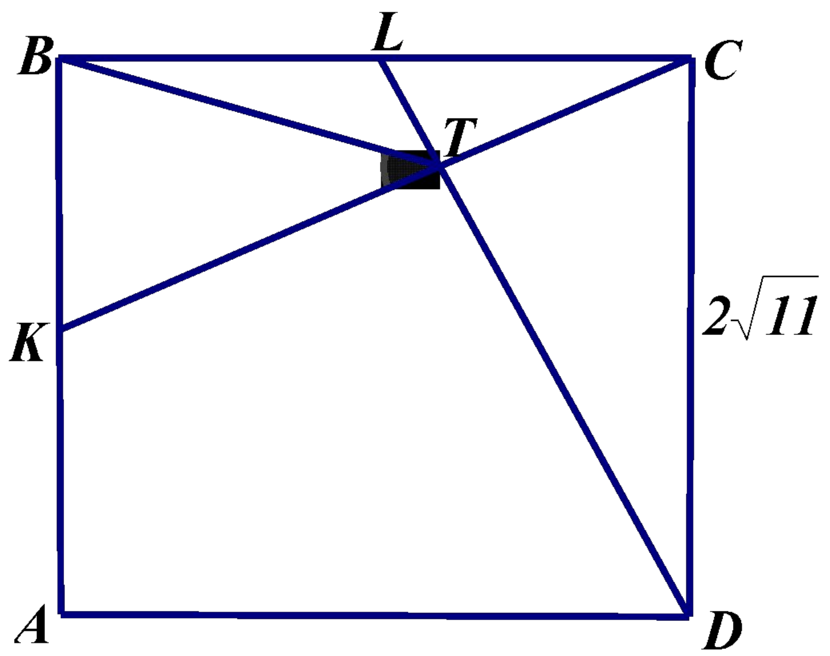


Задача 3 (основная волна 2022 г.)

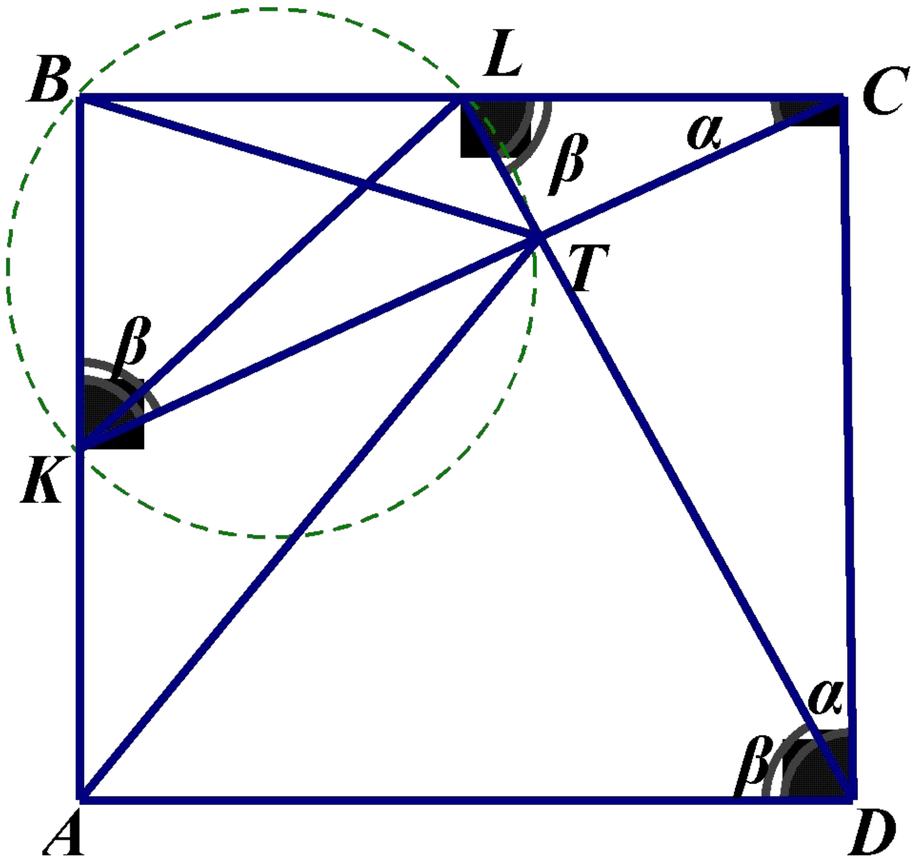
В квадрате ABCD точки K и L – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке T.

а) Докажите, что $\angle BTK=45^0$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABT, если $AB=2\sqrt{11}$.



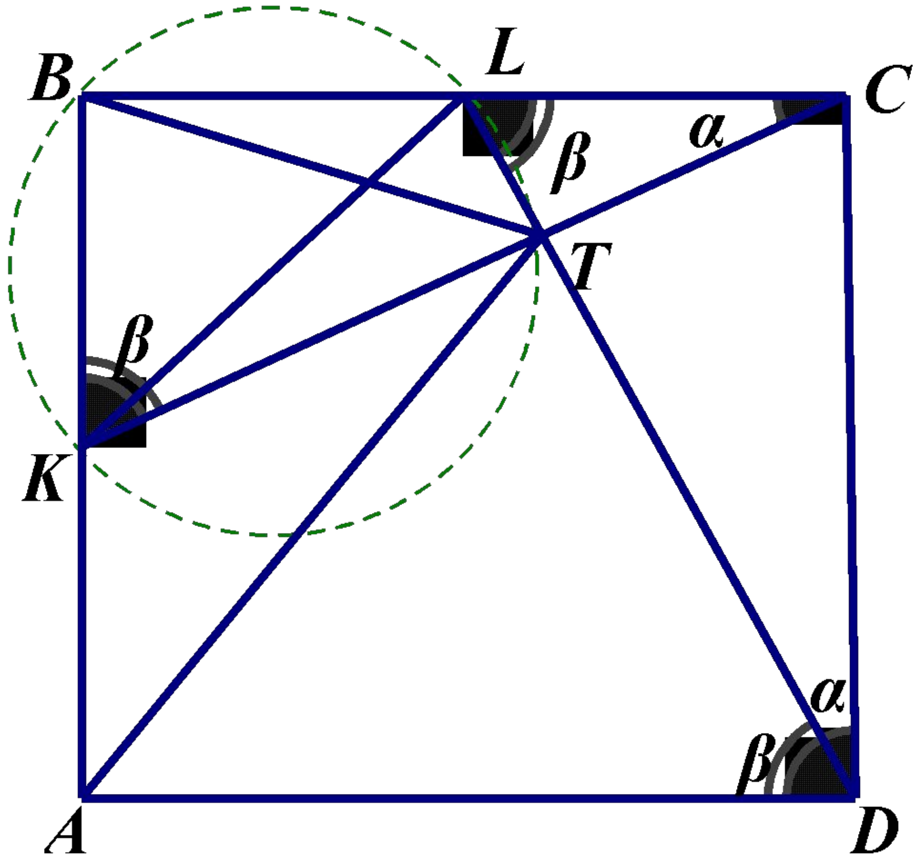
Решение. а) $\Delta BKC = \Delta DCL$ по двум катетам, тогда острые углы в сумме составляют 90°: $\alpha + \beta = 90°$, тогда $\angle CTL = 90°$.



Точки B, L, T и K лежат на окружности с диаметром KL, так как прямой угол опирается на диаметр. $\angle BTK = \angle BLK$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу

$\angle BLK = 45°$ ($BK = BL$, $\angle B = 90°$).

$\angle BTK = 45^0$.



б) По теореме Пифагора для ΔCDL

$$DL=\sqrt{CD^2+CL^2}=\sqrt{CD^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2}=\sqrt{55}.$$

$$\Delta CDL \sim \Delta CDT:\ \frac{CD}{DL}=\frac{DT}{CD},\ DT=\frac{CD^2}{DL}=\frac{44}{\sqrt{55}}.$$

Из треугольника BKTпо теореме синусов найдём BT:

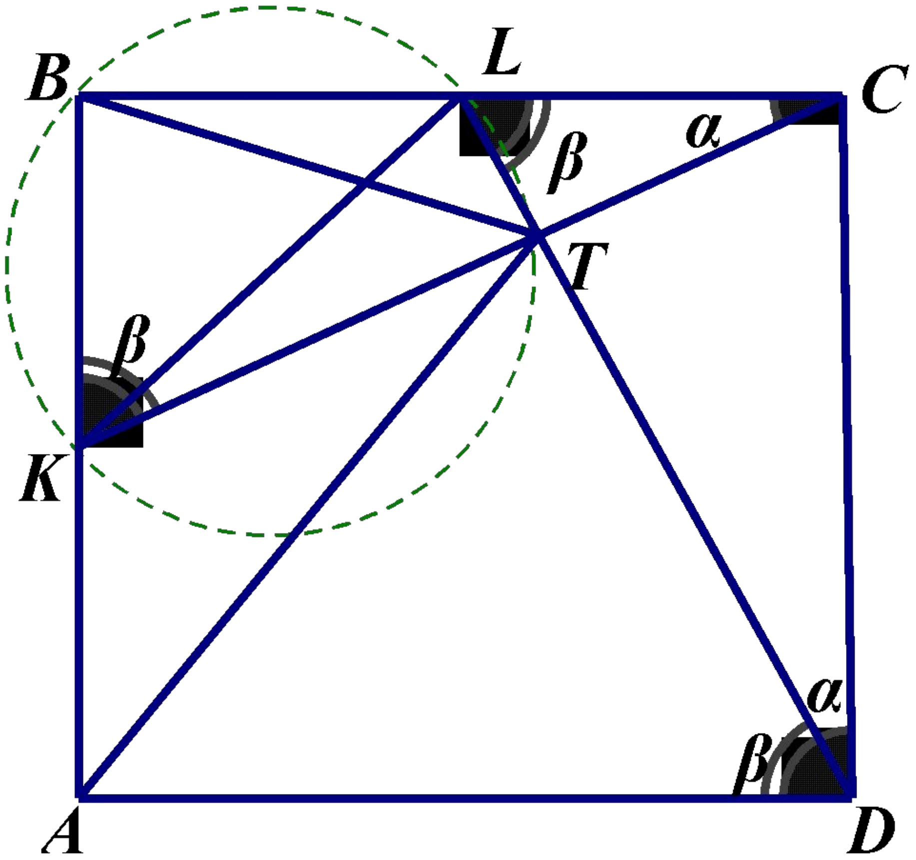
$$\frac{BT}{\sin\beta}=\frac{BK}{\sin 45^0},\qquad BT=\sqrt{2}BK\sin\beta,$$

$$\sin\beta=\cos\alpha=\frac{BC}{CK}=\frac{2\sqrt{11}}{DL}=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{55}}=\frac{2}{\sqrt{5}},BT=\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{5}}.$$

Δ ATD: по теореме косинусов

$$AT^2=AD^2+DT^2-2\cdot AD\cdot DT\cos\beta=44+\left(\frac{44}{\sqrt{55}}\right)^2-2\cdot\sqrt{44}\cdot\frac{44}{\sqrt{55}}\cos\beta$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.\qquad AT^2=44\left(1+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\right)=44 \Rightarrow AT=AD$$



∠ATD=∠ADT=β,

∠TAD=180°-2β.

∠BAT=90°-(180°-2β)=2β-90°.

Из треугольника ABT по теореме синусов найдём радиус R описанной окружности:

$$2R = \frac{BT}{\sin(2\beta - 90^0)} = \frac{BT}{-\cos 2\beta} = -\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{5}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)} = -\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right)} = \frac{2\sqrt{110}}{3},$$

$$R = \frac{\sqrt{110}}{3}.$$

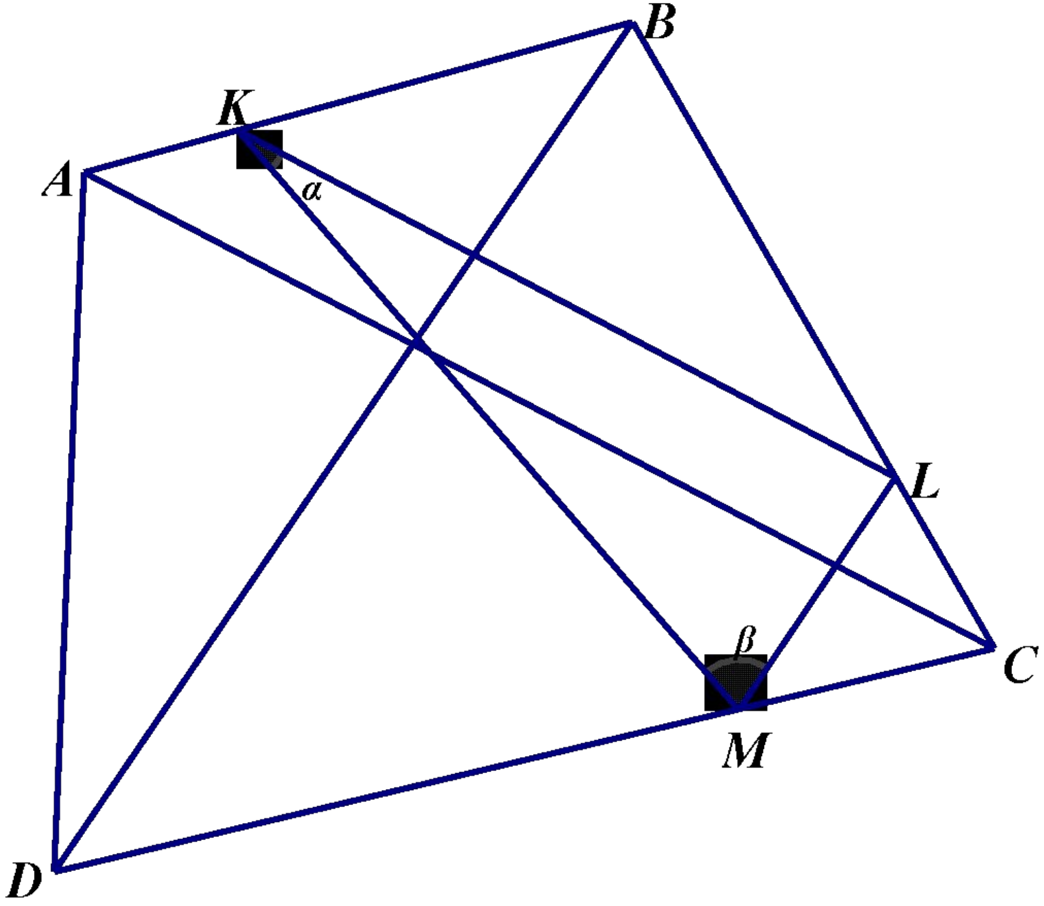
Задача 4 (основная волна 2022 г.)

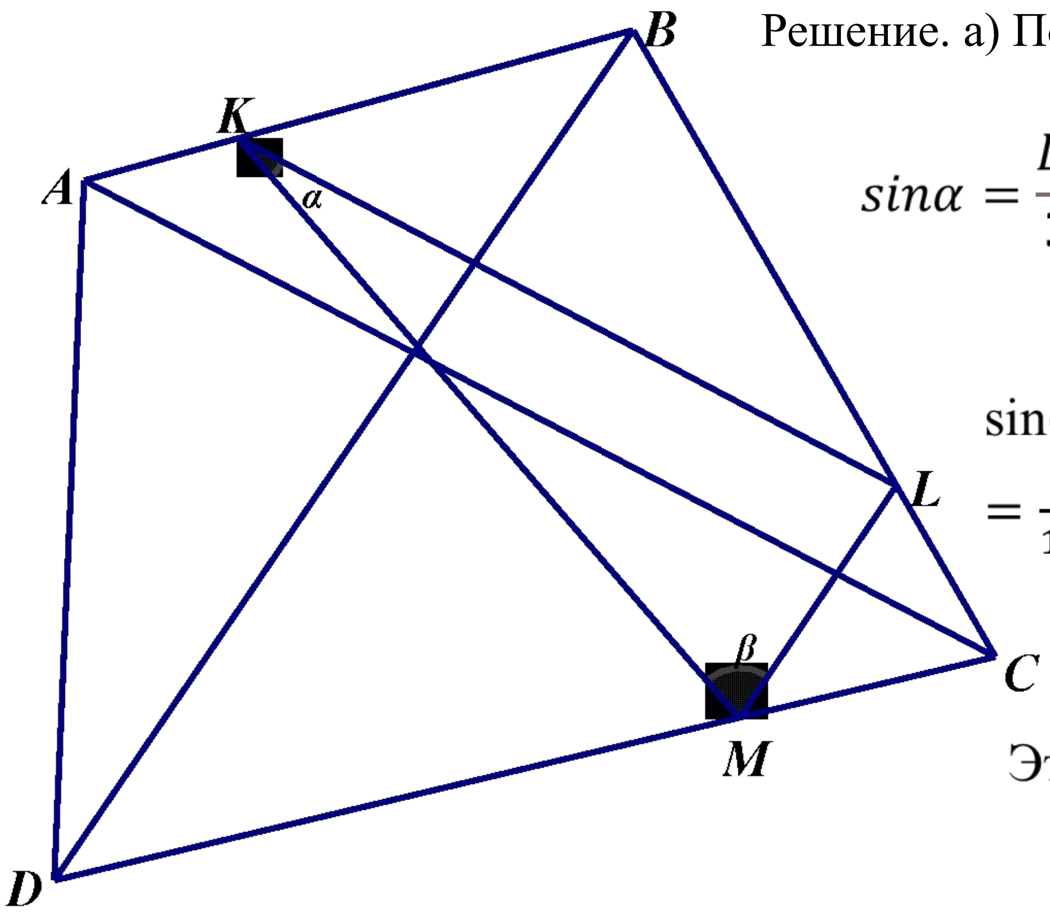
Точки K, L и M делят стороны выпуклого четырёхугольника ABCD в отношенииAK:KB=CL:LB=CM:MD=1:4.

Радиус окружности, описанной около треугольника KLM равен 17, KL=30, LM=16, KM>KL.

а) Докажите, что треугольник KLM прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABCD.





Решение. а) По теореме синусов для треугольника KLM $\frac{KL}{sin\beta} = \frac{LM}{sin\alpha} = 34,$

$$sin\alpha = \frac{LM}{34} = \frac{8}{17}, \alpha = arcsin\frac{8}{17}, sin\beta = \frac{KL}{34} = \frac{15}{17}, \beta = arcsin\frac{15}{17},$$

$$\alpha + \beta = arcsin\frac{8}{17} + arcsin\frac{15}{17}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\,\alpha =$$

$$= \frac{8}{17} \cdot \cos\left(arcsin\frac{15}{17}\right) + \frac{15}{17} \cdot \cos\left(arcsin\frac{8}{17}\right) = \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1.$$

Это означает, что $\alpha + \beta = 90^0$, $\angle$KLM $=180^0 - (\alpha + \beta) = 90^0$.

б) По теореме о пропорциональных отрезках AC||KL (BK:KA=BL:LC=4:1), аналогично DB||ML, тогда AC=$\frac{5}{4}KL = \frac{75}{2}, DB = \frac{5}{4}ML = 20$. $\angle$KLM $= 90^0$, значит диагонали четырёхугольника ABCD взаимно перпендикулярны.

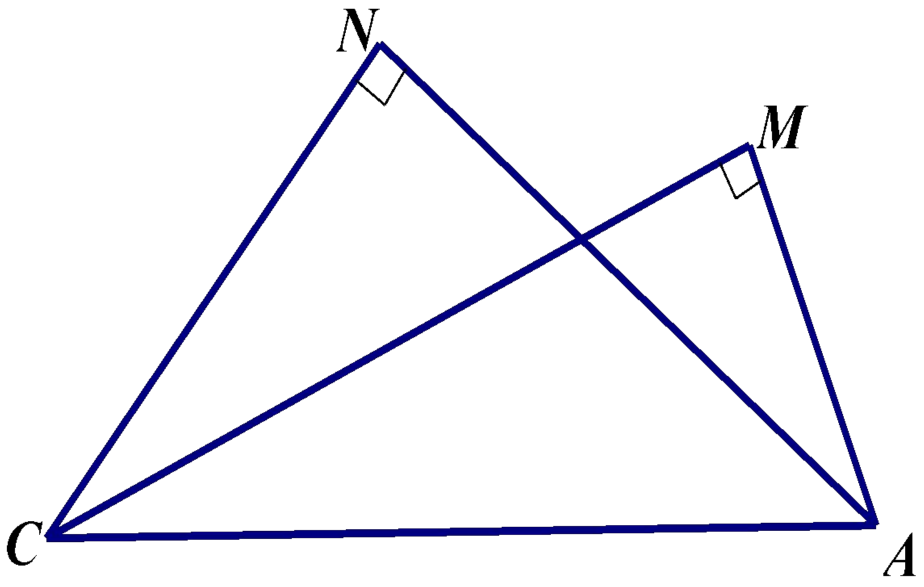
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{2} \cdot 20 = 375.$$

Задача 5 (основная волна 2022 г.)

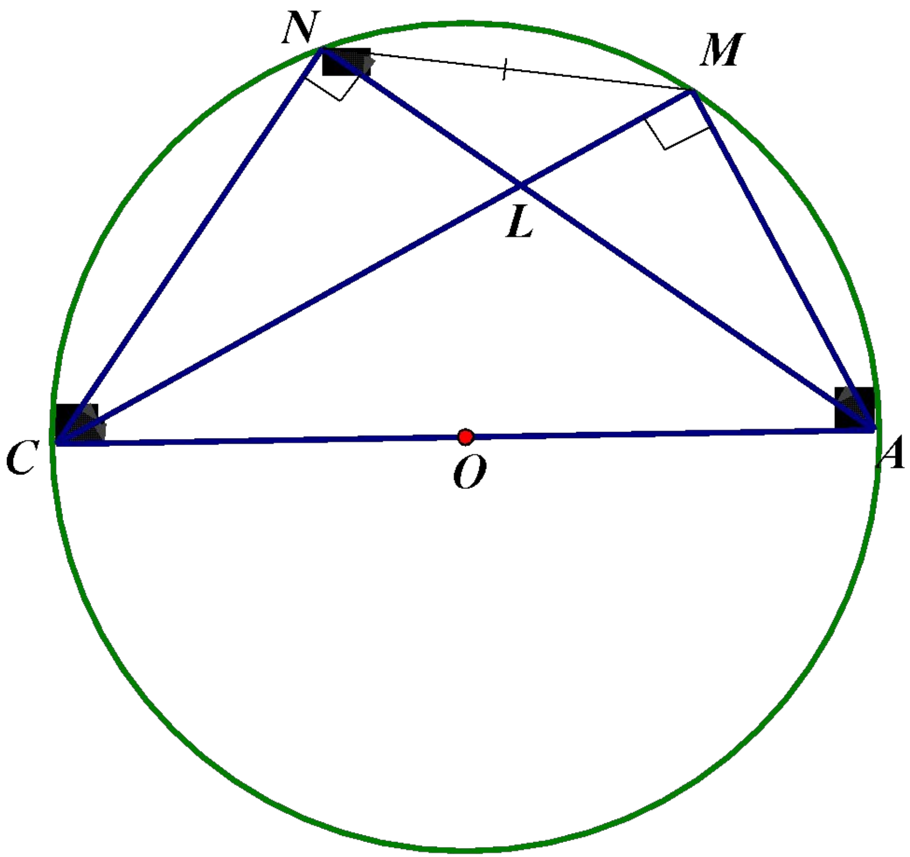
На стороне острого угла с вершиной C отмечена точка A. Из точки A на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры AM и AN соответственно.

а) Докажите, что $CM^2 + MN^2 = CN^2 + AN^2$.

б) Прямые CM и AN пересекаются в точке L. Найдите отношение CL:LM, если $\cos\angle CAM = \frac{5}{9}$.



Решение. а) Точки N, M лежат на окружности с диаметром AC.
ΔAMN – равнобедренный (∠ACM=∠MCN= ∠ANM=∠MAN как вписанные, опирающиеся на равные дуги).



По теореме Пифагора $CN^2 + AN^2 = AC^2$, $AM^2 + CM^2 = AC^2$, AM=MN, откуда $CN^2 + AN^2 = AM^2 + MN^2$.

б) ΔACM: $1+ tg^2 \angle CAM = \frac{1}{cos^2 CAM}$,

$ctg\angle CAM = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{AM}{CM}$,

$AM = \frac{5CM}{2\sqrt{14}}$.

$\frac{ML}{AM} = \frac{5}{2\sqrt{14}}$,

$ML = \frac{5AM}{2\sqrt{14}} = \frac{25CM}{56}$,

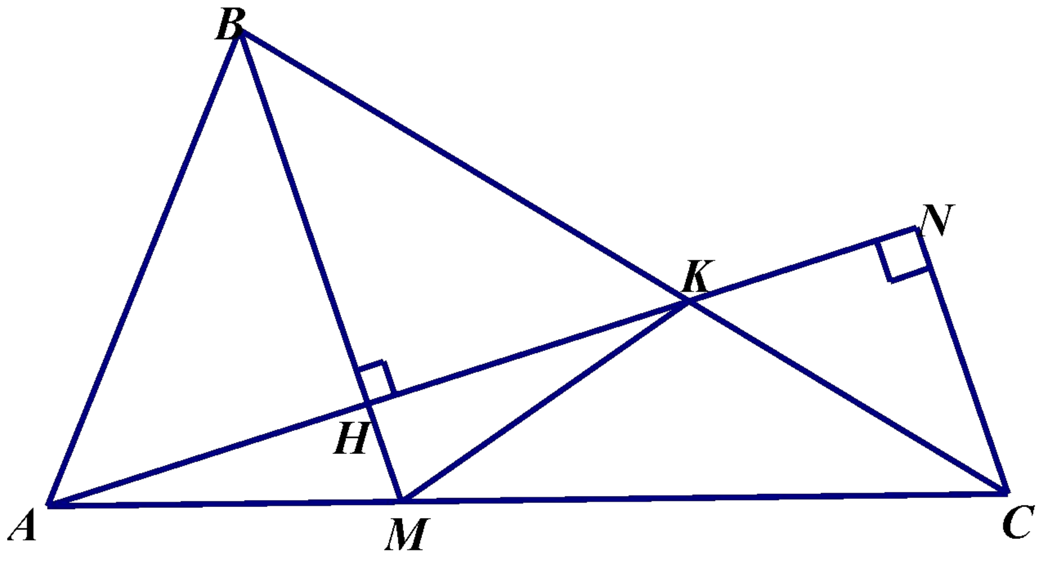
CL:LM=(CM-LM):LM=31:25

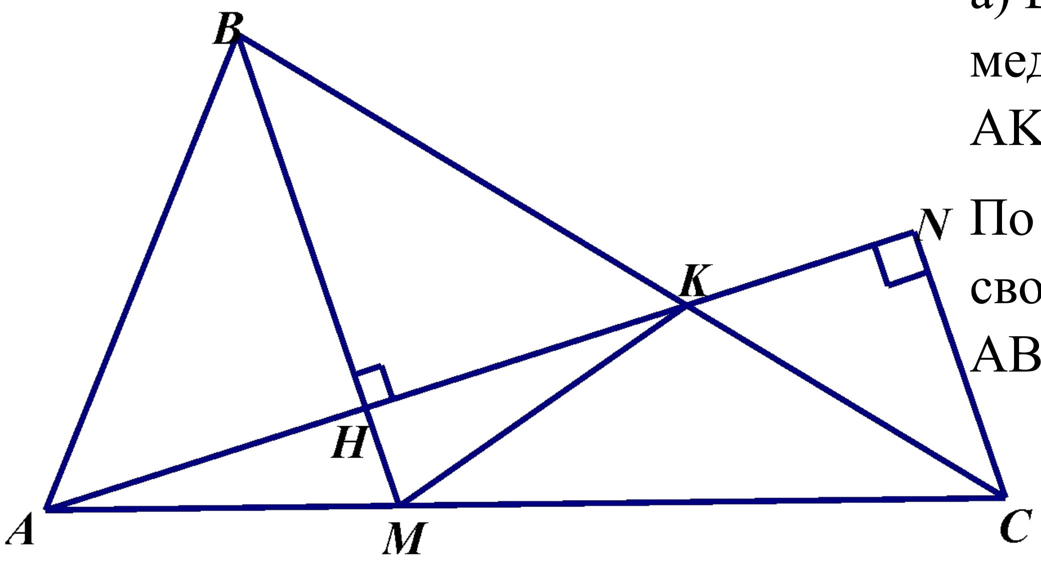
Задача 6 (основная волна 2022 г.)

В треугольнике ABC AB<BC, на стороне BC отмечена точка K так, что AB=BK. Из вершины B проведена биссектриса BM угла ABC, которая пересекает прямую AK в точке H. На прямую AK опущен перпендикуляр CN.

а) Докажите, что AB:BC=AH:HN.

б) Найдите отношение площади треугольника ABH к площади четырёхугольника HKCM, если BK: CK=3:1.





а) В равнобедренном треугольнике ABK биссектриса является медианой и высотой, значит HM||CN как два перпендикуляра к AK.

По теореме о пропорциональных отрезках AH:HN=AM:MC, а по свойству биссектрисы треугольника AB:BC=AM:MC, откуда AB:BC=AH:HN.

б) Пусть $S_{ABC} = S$. $S_{ABK} : S_{AKC} = S_{BMK} : S_{MKC} = \frac{BK}{KC} = 3:1$.

$S_{ABK} = \frac{3S}{4}, S_{AKC} = \frac{S}{4}$. *AB:BC=BK:(BK+KC)=3:4=AM:MC*

$$S_{ABH} = \frac{1}{2} S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3S}{8}. \quad S_{AKM} : S_{KMC} = \frac{AM}{MC} = 3:4, \; S_{AKM} = \frac{3}{7} S_{AKC} = \frac{3}{7} \cdot \frac{S}{4} = \frac{3S}{28}.$$

$$S_{KMC} = \frac{4}{7} S_{AKC} = \frac{4}{7} \cdot \frac{S}{4} = \frac{S}{7}.$$

$\Delta AHM = \Delta KHM$: $S_{AHM} = S_{KHM} = \frac{S_{AKM}}{2} = \frac{3S}{56}$.

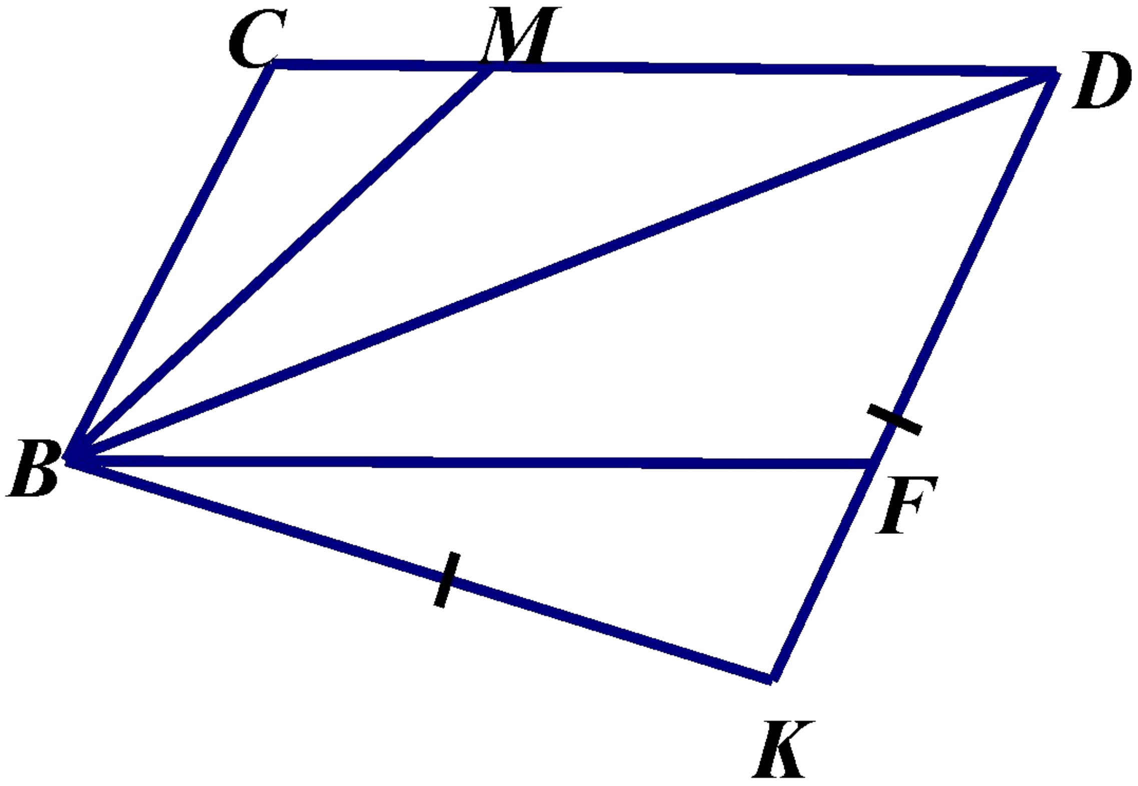
$$\frac{S_{ABH}}{S_{HKCM}} = \frac{3S}{8} : (S_{HMK} + S_{KMC}) = \frac{3S}{8} : \left(\frac{3S}{56} + \frac{S}{7}\right) = \frac{3S}{8} : \frac{11S}{56} = \frac{21}{11}.$$

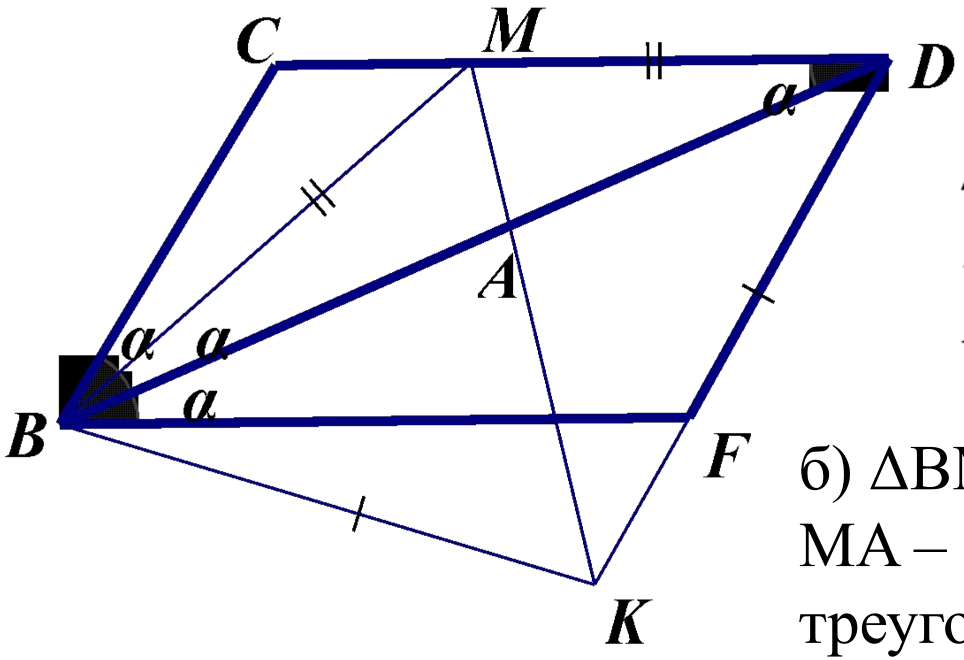
Задача 7 (основная волна 2022 г.)

В параллелограмме BCDF угол CBD в два раза больше угла DBF. BM – биссектриса угла CBD. На продолжении DF за точку F поставлена точка K так, что BK=KD.

а) Докажите, что $BM \cdot CD = BC \cdot BD$.

б) Найдите KM, если $tg\angle CBD = \frac{3}{4}$ и BD=10.





а) $\angle DBF = \alpha$, тогда $\angle CBD = 2\alpha$, $\angle CBM = \angle MBD = \alpha$, $\angle BDC = \angle FBD = \alpha$.

$\Delta BCM \sim \Delta BCD$ по двум углам: $\angle C$ – общий, $\angle MBC = \angle CDB = \alpha$. Тогда $BM : BD = BC : CD$, то есть $BM \cdot CD = BC \cdot BD$.

б) $\Delta BMK = \Delta DMK$ по трём сторонам, $\Rightarrow$ $\angle BMA = \angle DMA$ и MA – биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника BMD.

Аналогично KA– биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника BKD, $\angle DBK = 2\alpha$. В четырёхугольнике BMDK диагонали BD и MK взаимно перпендикулярны.

$$BA = AD = 5,\ \mathrm{tg}2\alpha = \frac{3}{4},\ \frac{AK}{AB} = \mathrm{tg}2\alpha,\ \frac{AM}{AB} = \mathrm{tg}\alpha.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - tg^2\alpha},\ \frac{3}{4} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - tg^2\alpha},\ 3 - 3tg^2\alpha = 8tg\alpha,$$ откуда $tg\alpha = \frac{1}{3}$ $(0 < \alpha < 90^0)$.

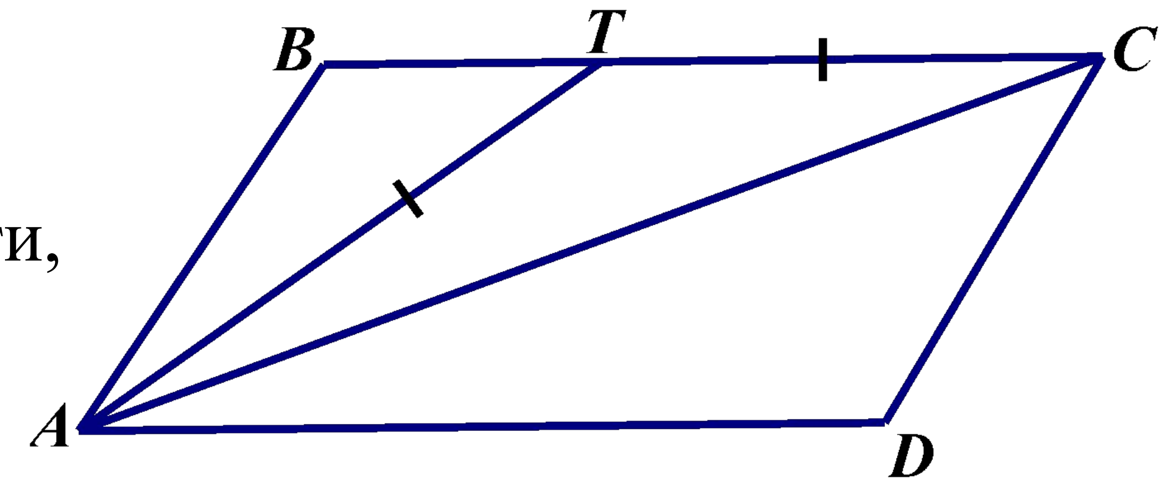
$$KM = AK + AM = 5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{13}{12} = \frac{65}{12}.$$

Задача 8 (основная волна 2022 г.)

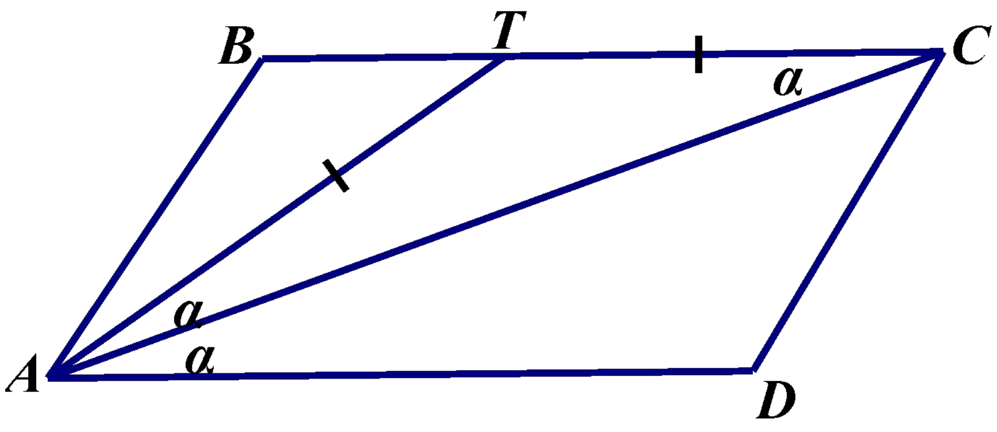
На стороне BC параллелограмма ABCD отмечена точка T такая, что треугольник ATC равнобедренный, AT=TC.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ATD лежит на диагонали параллелограмма.

б) Найдите радиус окружности, вписанный в треугольник ATD, если известно, что AB=5, BC=25, а $\angle DAB=60^0$.



Решение. а) $\angle TAC=\angle TCA=\alpha$. $\angle BCA=\angle CAD=\alpha \Rightarrow$ AC – биссектриса угла TAD.



Центр окружности, вписанной в треугольник ATD лежит на диагонали параллелограмма, так как центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис

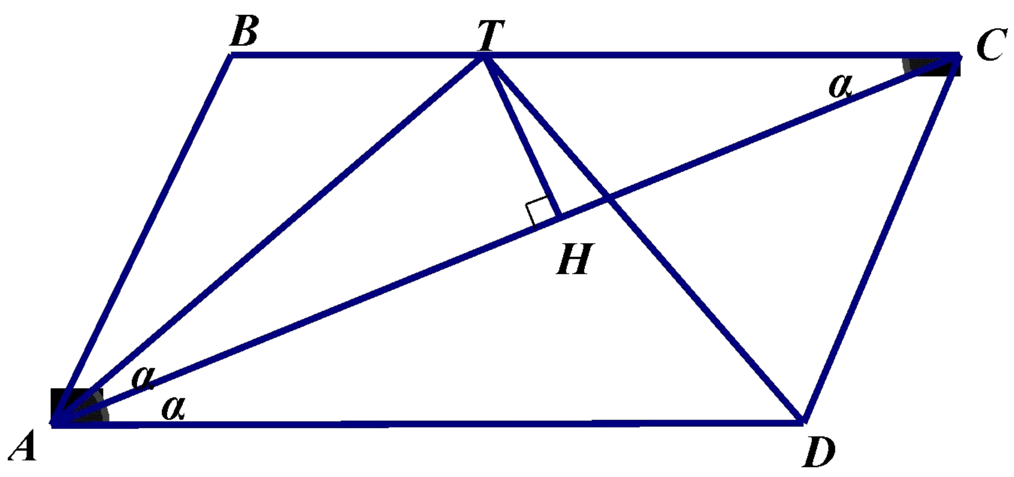
б) $r = \frac{S}{p}$

По теореме косинусов для треугольника ADC, в котором $\angle ADC = 120^0$,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC\cos\angle ADC = 625 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 775, AC = 5\sqrt{31}.$$

По теореме синусов для треугольника ACD

$$\frac{AC}{\sin 120^0} = \frac{CD}{\sin\alpha}, \frac{10\sqrt{31}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sin\alpha}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{31}}, \qquad \cos\alpha = \frac{11}{2\sqrt{31}}$$



Высота TH равнобедренного треугольника ATC является медианой,

CH=$\frac{1}{2}AC$=$\frac{5\sqrt{31}}{2}$, $CT = \frac{CH}{cos\alpha} = \frac{5\sqrt{31}\cdot 2\sqrt{31}}{2\cdot 11} = \frac{155}{11}$.

$$S_{ATD} = \frac{1}{2}AT \cdot ADsin\angle TAD =$$

$=\frac{1}{2} \cdot \frac{155}{11} \cdot 25sin2\alpha = \frac{155\cdot 25}{2\cdot 11} \cdot 2sin\alpha \cdot cos\alpha = \frac{155\cdot 25}{11} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{31}} \cdot \frac{11}{2\sqrt{31}} = \frac{125\sqrt{3}}{4}$.

По теореме косинусов для треугольника TDC $TD^2 = TC^2 + CD^2 - 2TC \cdot TDcos\angle TCD =$

$=\left(\frac{155}{11}\right)^2 + 25 - 2 \cdot \frac{155}{11} \cdot 5 \cdot cos60^0 = \frac{155}{11} \cdot 5\left(\frac{31}{11} - 1\right) + 25 = \frac{15500+3025}{121} = \frac{18525}{121}$, TD=$\frac{5\sqrt{741}}{11}$.

$$p = \frac{AD + TD + AT}{2} = \frac{25 + \frac{155}{11} + \frac{5\sqrt{741}}{11}}{2} = \frac{430 + 5\sqrt{741}}{22}.$$

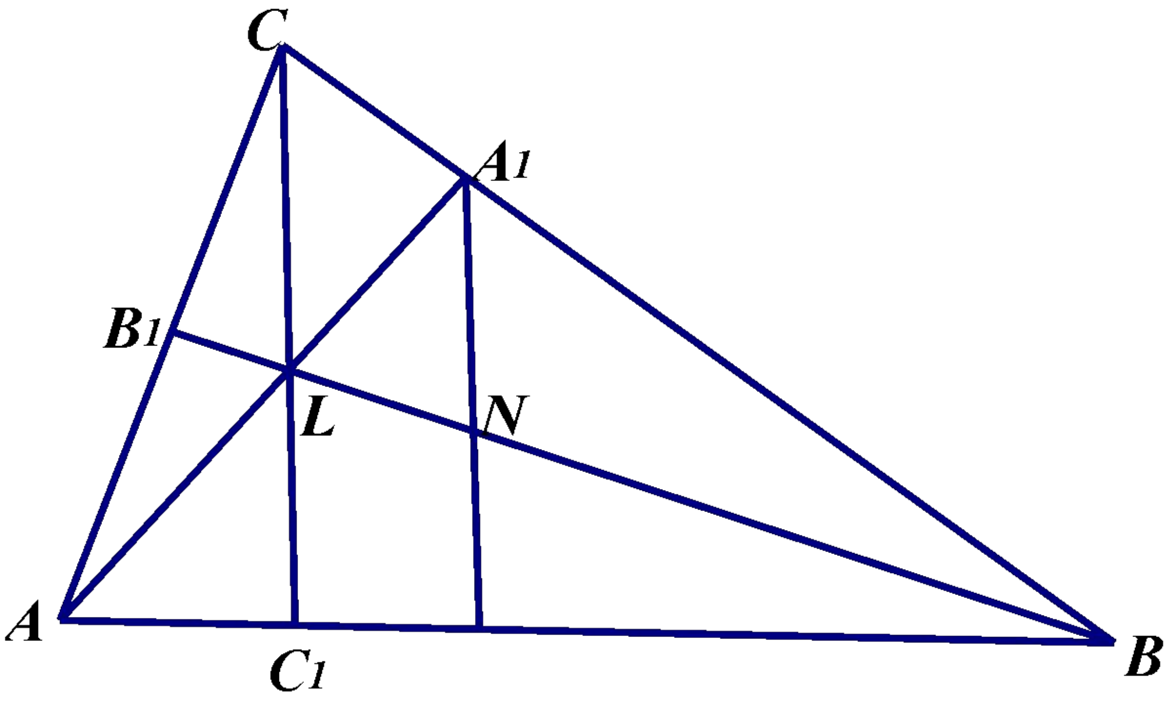
$$r = \frac{125\sqrt{3} \cdot 22}{4 \cdot (430 + 5\sqrt{741})} = \frac{1375\sqrt{3}}{2 \cdot (430 + 5\sqrt{741})}.$$

Задача 9 (основная волна 2022 г.)

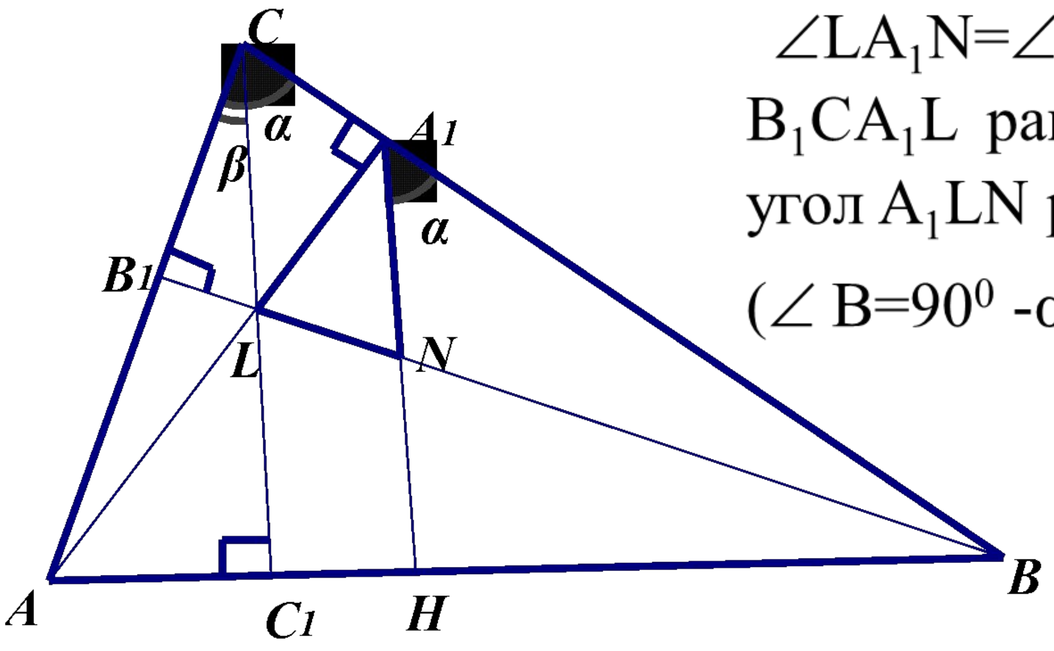
В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке L. Через точку A_1 параллельно высоте CC_1 проведена прямая, пересекающая высоту BB_1 в точке N.

а) Докажите, что $AC \cdot LN = A_1L \cdot BC$.

б) Найдите отношение площадей треугольников ABC и A_1LN, если AB=8, BC=7, AC=6.



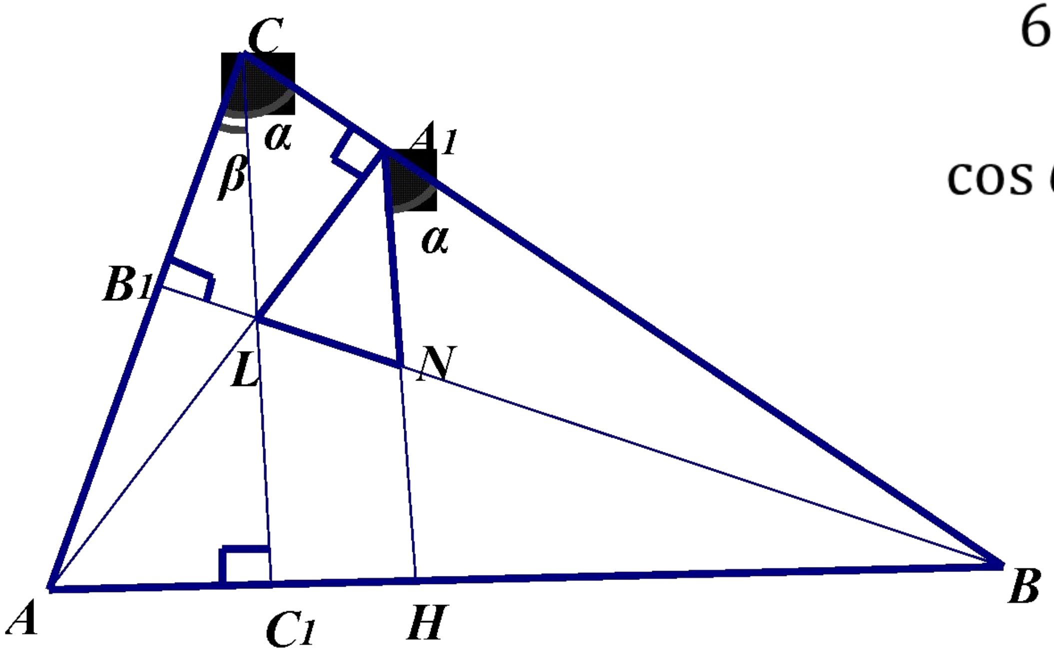
Решение. а) $\angle BCC_1 = BA_1H = \alpha$ как соответственные при $CC_1 \| A_1H$ и секущей BC,



$\angle LA_1N = \angle ABA_1 = 90^0 - \alpha$. Сумма углов четырёхугольника B_1CA_1L равна 360^0, тогда $\angle B_1LA_1 = 180^0 - (\alpha + \beta)$, а смежный угол A_1LN равен $(\alpha + \beta)$. $\Delta ABC \sim \Delta A_1LN$ по двум углам ($\angle B = 90^0 - \alpha$). Тогда $BC : A_1L = AC : LN$, откуда

$$BC \cdot LN = A_1L \cdot AC.$$

Решение.



б) По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos\angle ACB$,

$$64 = 36 + 49 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cos C\,,$$

$$\cos C = \frac{1}{4}, sinC = \frac{\sqrt{15}}{4}, tgC = \sqrt{15}.$$

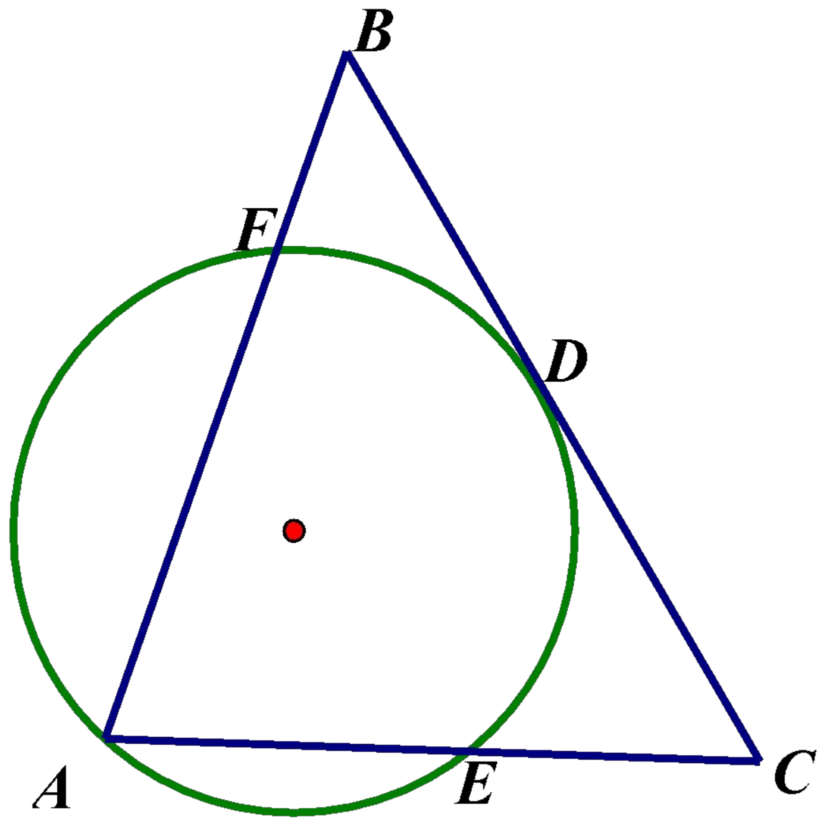
$A_1C = AC\cos C = \frac{3}{2}, A_1B = BC - A_1C = \frac{11}{2}.\ A_1L = A_1B:\ tgC = \frac{11}{2\sqrt{15}}.$

Коэффициент подобия треугольников ABC и A_1LN равен $\frac{BC}{A_1L} = 7:\frac{11}{2\sqrt{15}} = \frac{14\sqrt{15}}{11}$.

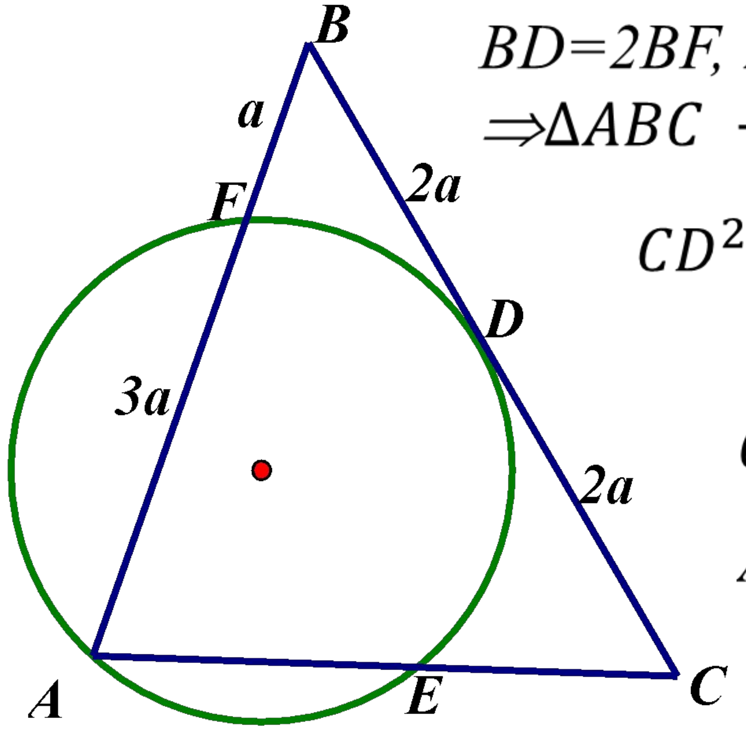
$$S_{ABC}:S_{A_1LN} = \left(\frac{14\sqrt{15}}{11}\right)^2 = \frac{196 \cdot 15}{121} = \frac{2940}{121}.$$

Задача 10 (ОГЭ 2022 г.)

Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается его стороны BC в точке D и пересекает стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Известно, что AF=3BF, BD=CD, AE=2CE и что ED=$\sqrt{10}$. Найдите BC.



Решение.



$$BD^2 = AB \cdot BF = 4BF^2$$

BD=2BF, $BD = CD$,

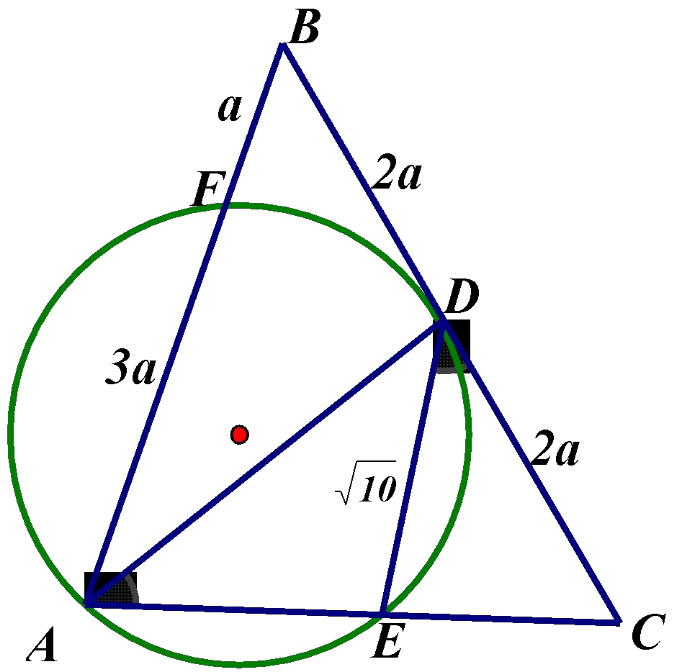
$\Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный.

$$CD^2 = AC \cdot CE = 3CE^2$$

$$CD = \sqrt{3}CE = 2a,$$

$$CE = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \text{AE} = \frac{4a}{\sqrt{3}},$$

$$AC = \frac{6a}{\sqrt{3}}.$$



$\angle CDE = \angle CA$ $\quad \Delta ADC \sim \Delta CDE$

$$\frac{AD^{D}}{DE} = \frac{AC}{CD} \qquad \frac{AD}{\sqrt{10}} = \frac{6a}{\sqrt{3} \cdot 2a}, AD = \sqrt{30}$$

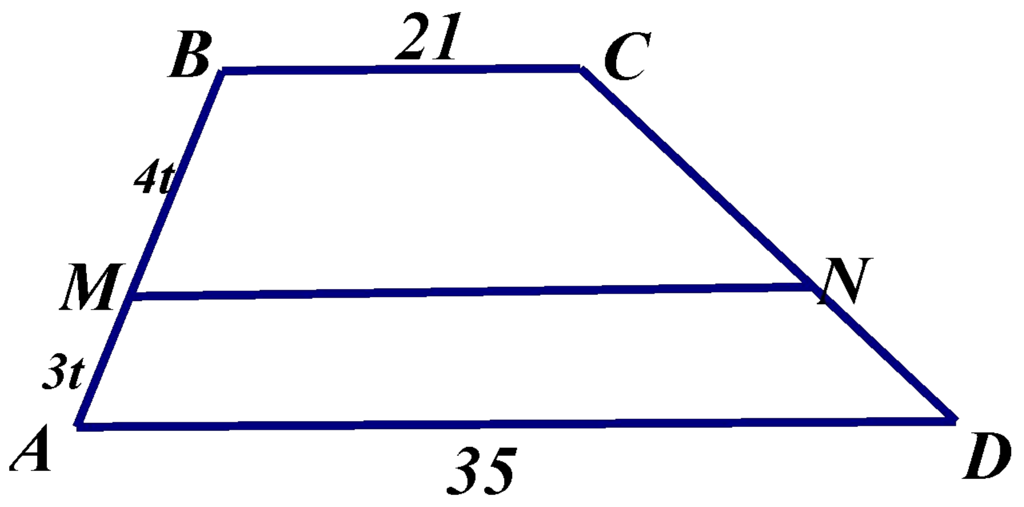
По теореме косинусов для ΔABC $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos\angle ACB$ $\qquad \cos\angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{4}$

По теореме косинусов для ΔADC $AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC\cos\angle ACB$

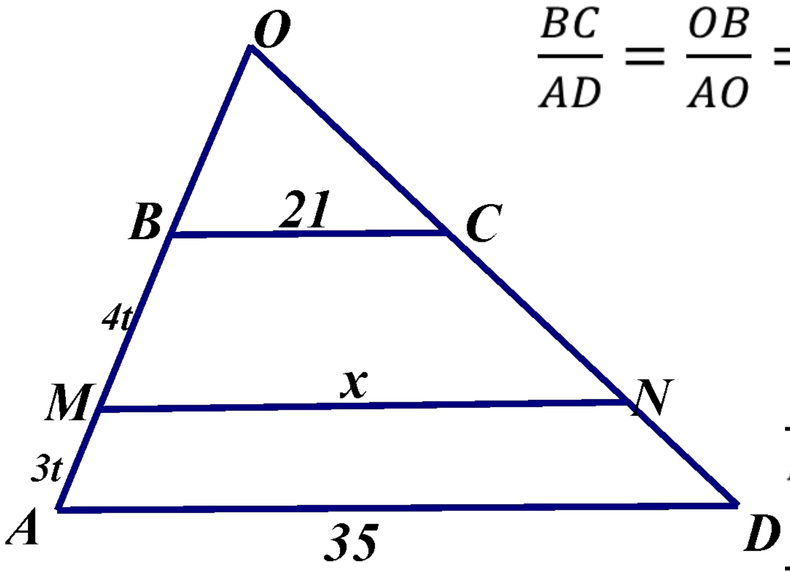
$$a = \sqrt{3}, BC = 4a = 4\sqrt{3}$$

Задача 11 (ОГЭ 2022 г.)

В трапеции ABCD с основаниями AD и BC проведена прямая MN параллельная основаниям и делящая боковую сторону AB в отношении AM:MB=3:4. Найдите длину отрезка MN, если AD=35, BC=21.



Решение. $\Delta ADO \sim \Delta BCO$



$$\frac{BC}{AD} = \frac{OB}{AO} = \frac{OB}{OB+AB} = \frac{OB}{OB+7t} = \frac{3}{5}, OB = \frac{21t}{2}.$$

$\Delta MNO \sim \Delta BCO$

$$\frac{BC}{MN} = \frac{OB}{OM} = \frac{OB}{OB+BM} = \frac{\frac{21t}{2}}{\frac{21t}{2}+4t} = \frac{21}{29}.$$

$\frac{BC}{MN} = \frac{21}{29}$, MN=29