ГБОУ гимназия № 70 Петроградского района Санкт-Петербурга

«Решение логарифмических неравенств методом рационализации

Шостак Леон Григорьевич
учитель математики высшей категории

π

Метод рационализации

Метод, который мы сегодня рассмотрим, называется

<u>методом рационализации</u> потому, что с его помощью можно от

логарифмического неравенства перейти к дробно-рациональному,

а далее перейти к методу интервалов.

А метод интервалов мы можем использовать только для

дробно-рациональных неравенств.

Метод рационализации удобно применять когда в основании логарифмов буквенное выражение или неравенство из себя представляет произведение или частное логарифмов с разными основаниями.

Итак, в чем же суть метода.

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (*)$$

1. Если a>1, то f(x)>g(x). А значит (a-1)>0 и f(x)-g(x)>0.

Следовательно (a-1)· (f(x)−g(x))>0

2. Если 0<a<1, то f(x)<g(x). А значит (a-1)<0 и f(x)-g(x)<0.

Следовательно (a-1)· (f(x)−g(x))>0 , т.е. знак исходного неравенства сохраняется.

Таким образом, если

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0, \text{ то}$$

$$(a-1)\cdot(f(x)-g(x))>0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \ (*)$$

Аналогично, если знак неравенства меньше нуля

ПРИМЕРЫ

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} > 0 \\ \dfrac{3x-1}{x+2} \neq 1 \\ 2x^2+x-1>0 \\ 11x-6-3x^2>0 \end{cases}$$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) - \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \geq 0$$

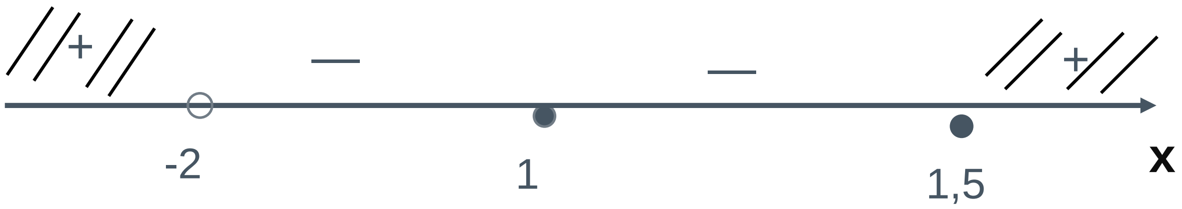
$$\frac{2}{3} < x < 1{,}5; \quad 1{,}5 < x < 3 \quad (*)$$

Применим метод рационализации

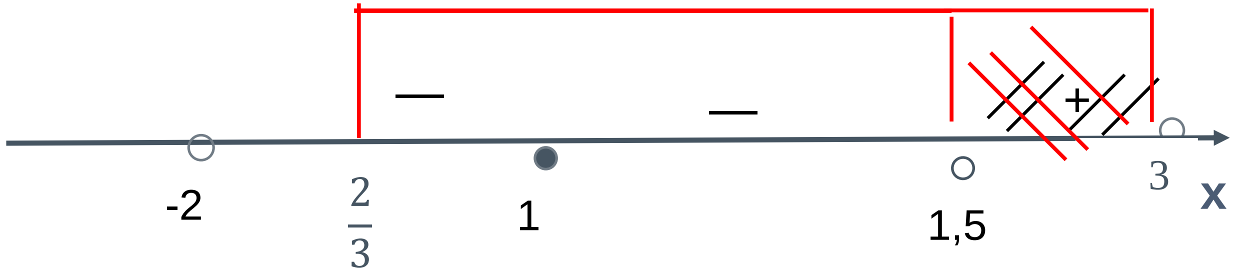
$$\left(\frac{3x-1}{x+2}-1\right)\cdot(2x^2+x-1-(11x-6-3x^2)) \geq 0$$

$$\frac{2x-3}{x+2}\cdot(5x^2-10x+5)\geq 0\ \ |:5$$

$$\frac{2x-3}{x+2}\cdot(x-1)^2\geq 0$$



С учетом (*)



Ответ: x=1, 1,5<x<3

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2) \leq 0$$

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2) - \log_{\frac{2x+2}{5x-1}} 1 \leq 0$$

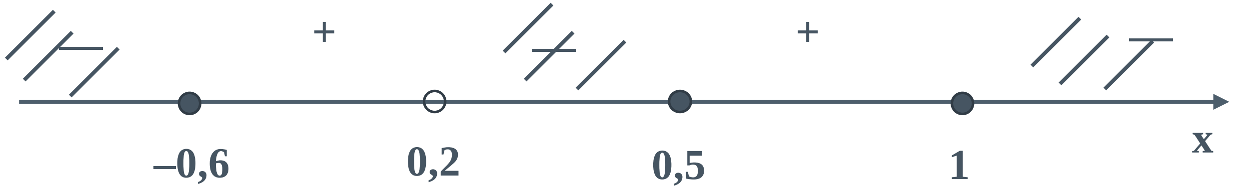
Применим метод рационализации

$$\left(\frac{2x+2}{5x-1}-1\right)\cdot(10x^2+x-2-1) \leq 0$$

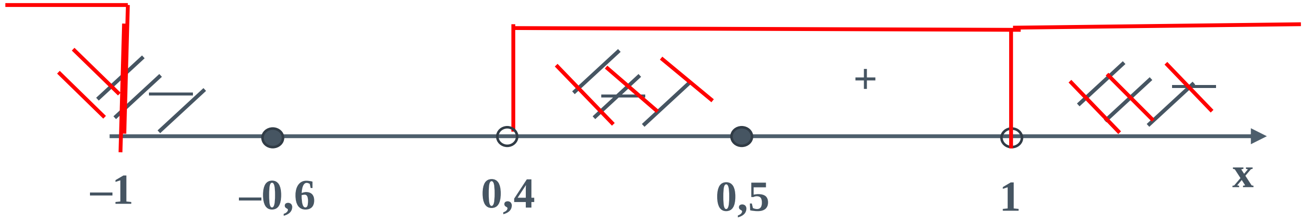
$$\frac{3-3x}{5x-1}\cdot(10x^2+x-3) \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{2x+2}{5x-1} > 0 \\ \frac{2x+2}{5x-1} \neq 1 \\ 10x^2+x-2>0 \end{cases} \quad (*)$$

x<-1; 0,4<x<1; x>1 (*)



С учетом (*)



Ответ: $x<-1$; $0{,}4<x \le 0{,}5$; $x>1$

3. Решить неравенство

$$\log_x(7-x) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7) - \log_x(x-1)$$

$$\begin{cases} 7-x>0 \\ x-1>0 \\ x^3-6x^2+14x-7>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$\log_x(7-x) + \log_x(x-1) - \log_x(x^3-6x^2+14x-7) < 0$$

1<x<7 (*)

$$\log_x(8x-7-x^2) - \log_x(x^3-6x^2+14x-7) < 0$$

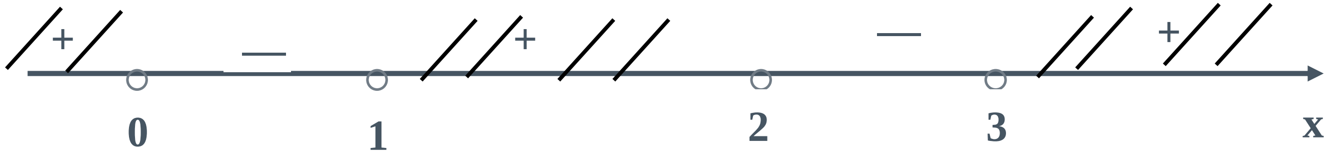
Применим метод рационализации

$$(x-1)\cdot(8x-7-x^2-x^3+6x^2-14x+7)<0$$

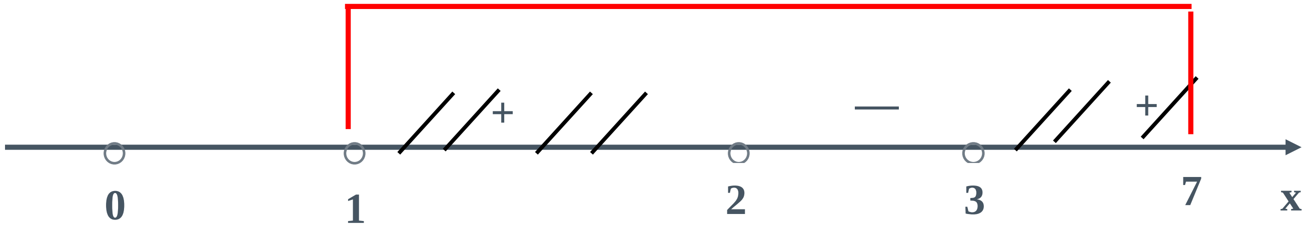
$$(x-1)\cdot(-x^3+5x^2+6x)<0$$

$$(x-1)\cdot(x^3-5x^2-6x)>0$$

$$x\cdot(x-1)\cdot(x-2)(x-3)>0$$



С учетом (*)



Ответ: 1<x<2;   3<x<7

4. Решить неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0$$

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 2-x\neq 1 \\ x+2>0 \\ x+3>0 \\ x+3\neq 1 \\ 3-x>0 \end{cases}$$

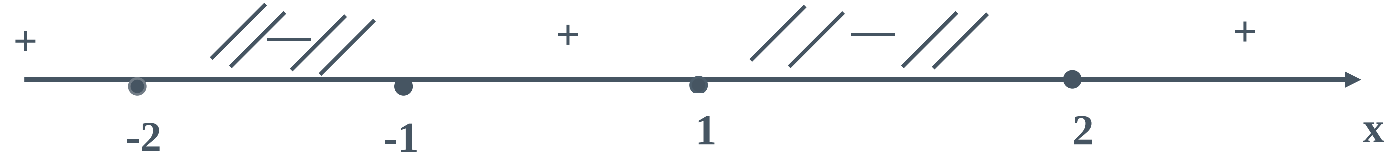
$$(\log_{2-x}(x+2)-\log_{2-x}1)\cdot(\log_{x+3}(3-x)-\log_{x+3}1)\leq 0$$

-2<x<1; 1<x<2 (*)

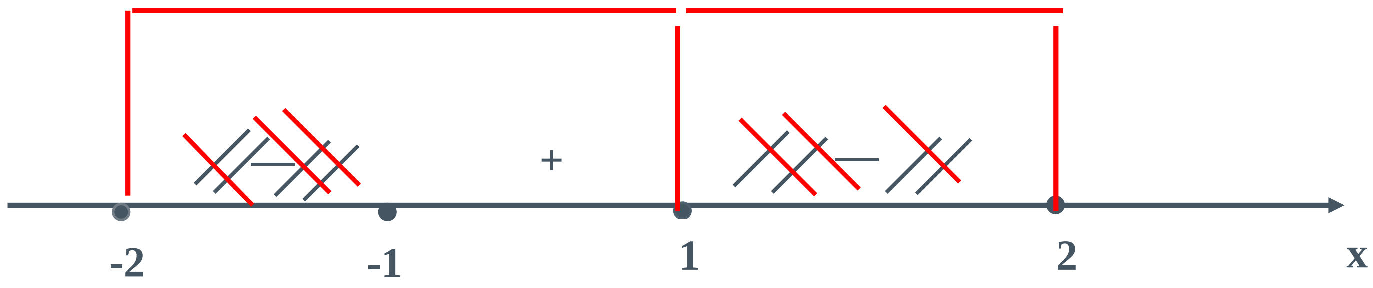
Применим метод рационализации

(2-x-1) ·(x+2-1) ·(x+3-1) ·(3-x-1) ≤ 0

(1-x) ·(x+1) · (x+2) ·(2-x) ≤ 0



С учетом (*)



Ответ: $-2 \le x \le -1$; $1 \le x \le 2$

Заключение

Некоторые задания №15 из профильного ЕГЭ содержат неравенства, содержащие неизвестное в основании логарифма, решение которых традиционным способом требуют больших затрат времени. Метод рационализации позволяет сократить время при решении такого типа неравенств.

Основная идея метода рационализации состоит в замене одного выражения на другое, имеющего с ним одни и те же корни (в области определения) и совпадающего по знаку.

Преобразованное таким образом неравенство будет равносильно исходному с учётом области определения.

Этот способ применим и при решении некоторых других неравенств (показательных, иррациональных, неравенств, содержащих модули).

При применении метода рационализации для решения логарифмических неравенств можно пользоваться таблицей.

$\log_a f - \log_a g \vee 0$	$(a - 1) \cdot (f - g) \vee 0$
$\log_a f \vee 0$	$(a - 1) \cdot (f - 1) \vee 0$
$\log_a f \vee 1$	$(a - 1) \cdot (f - \mathrm{a}) \vee 0$
$\log_a f \cdot \log_b g \vee 0$	$(a - 1) \cdot (f - 1) \cdot (b - 1) \cdot (g - 1) \vee 0$
$\log_a f + \log_a g \vee 0$	$(a - 1) \cdot (f \cdot g - 1) \vee 0$